HUMAN REVIEW | 2022 | ISSN 2695-9623
International Humanities Review / Revista Internacional de Humanidades
https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4186

ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UN MARCO COMPETENCIAL

Enfoque didáctico y estudio exploratorio

Teaching of second-degree equations in a competence framework

ANA MARÍA ZARCO GARCÍA[1], ALMUDENA LLORÉNS PAYÁ[2]
[1]Universidad Internacional de La Rioja, España
[2]Colegio Salesianos San Vicente Ferrer de Alcoy, España

KEYWORDS

Secondary School
Equation
Mathematics
Didactic
Competencies
Algebra
Simulations

ABSTRACT

This paper presents a review of the different approaches to teaching the second-grade equation for Secondary Education that are conjectured to be necessary to increase the quality of learning with the rigour and treatment required, highlighting the value of this topic itself and its applications. In addition, the results of an exploratory descriptive study accomplished on the knowledge of the second-grade equation of Secondary Education students are provided to finally draw the conclusion that their knowledge was not consolidated, and changes are needed.

PALABRAS CLAVE

Enseñanza Secundaria
Ecuación
Matemáticas
Didáctica
Competencias
Álgebra
Simulaciones

RESUMEN

En este artículo se presenta una revisión de los diferentes enfoques de enseñanza de la ecuación de segundo grado para Educación Secundaria que se conjetura serían necesarios con el fin de aumentar la calidad del aprendizaje con el rigor y el tratamiento requerido, resaltando el valor de este tópico en sí mismo y de sus aplicaciones. Además, se aportan los resultados de un estudio descriptivo exploratorio realizado sobre los conocimientos de la ecuación de segundo grado de alumnado de Enseñanza Secundaria para finalmente extraer la conclusión de que su conocimiento no quedó consolidado y se precisa hacer cambios.

Recibido: 27/ 04 / 2022
Aceptado: 29/ 06 / 2022

1. Introducción

Actualmente el sistema educativo español se encuentra inmerso en una transformación que está generando debate especialmente entre los docentes de matemáticas. La enseñanza basada en competencias pretende disminuir las diferencias entre lo que se aprende en la escuela y lo que se necesita en el mundo real (Trujillo Segoviano, 2014). En lo que se refiere a las matemáticas, no debe interpretarse con disminuir la calidad de su aprendizaje con el rigor y el tratamiento que requiere su conocimiento. Por un lado, cabe resaltar el valor de las matemáticas en sí mismas y por otro de sus aplicaciones, planteando diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje.

Los docentes se enfrentan al reto de la inclusión educativa, que no hay que confundir con una disminución de contenidos o de nivel de exigencia o con conformarse y pensar que no se puede hacer nada con ciertos estudiantes. La escuela debe ser un lugar donde se estimule el talento matemático entendido como el dominio excepcional de competencias desarrolladas sistemáticamente (conocimientos y capacidades). En palabras de Hardy (1940) “una de las primeras obligaciones de un profesor es exagerar un tanto la importancia de su asignatura” (p. 47). Es aquí donde el profesorado, creyéndose muy bien la importancia de las matemáticas, puede contribuir a esa estimulación empleando métodos de enseñanza adecuados y exponiendo los conceptos matemáticos con enfoques que permitan su interiorización y por ende un aprendizaje duradero.

Investigaciones psicológicas han puesto de relevancia otras cualidades cognitivas, aparte de la inteligencia, que repercuten en el aprendizaje y la memoria. La curiosidad es una de esas cualidades que influye tanto en la capacidad de comprensión como el tiempo en que se retiene la información aprendida (von Stumm, Hell, y Chamorro-Premuzic, 2011; Engel, 2011).

Susan Engel ha pasado la mayor parte de los últimos veinte años realizando estudios sobre el desarrollo de la curiosidad y la invención, las ideas de los niños y la reforma escolar. Sus investigaciones no han terminado e insiste que es hora de aplicarlas en las aulas (Engel, 2015).

Otra cualidad es la mentalidad de crecimiento, concepto introducido por Dweck (2017) que se fundamenta en la convicción de que las aptitudes y el talento de las personas se pueden mejorar a través del esfuerzo, así como también, se puede modelar los intereses y el temperamento, es decir, “todo el mundo puede cambiar y crecer por medio de la dedicación y la experiencia” (Dweck, 2017, p. 10).

Las matemáticas, al abarcar conocimientos y habilidades biológicamente secundarios y de tipo cultural, no se aprenden de manera espontánea (Ruiz Martín, 2020). Por ello, el docente deberá estar provisto de diferentes herramientas de enseñanza de un mismo conocimiento dependiendo del objetivo que quiera conseguir y del contexto.

Por su parte, la taxonomía de Bloom ordena las actividades mentales según su complejidad, siendo recordar la de menor complejidad. Le siguen las acciones: comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Los principios de los sistemas educativos modernos tienen a resaltar que la enseñanza debe ser menos memorística. Para realizar acciones cognitivas de nivel superior se debe haber pasado por las de nivel inferior según se expone en Masapanta y Velázquez (2017), no pudiéndose eliminar acciones cognitivas de nivel inferior para llegar a las de nivel superior. Cabe la posibilidad de que recordar y comprender pueda ser resultado la una de la otra o viceversa.

Todas estas ideas refuerzan el hecho de poner el foco de atención en el proceso, de forma que el alumnado disfrute del aprendizaje, aunque le resulte difícil, y se mantenga motivado para poder perseverar. Además, vivimos en un mundo cambiante y la vida media del conocimiento es cada vez menor, por lo que los estudiantes de hoy tienen que estar mejor preparados para poner al día sus conocimientos. La comprensión de lo que se está aprendiendo, estableciendo conexiones por parte de los estudiantes, ayudará a que tengan diferentes perspectivas y estrategias, fundamentos que deben ser valorados a la hora de planificar su formación académica.

2. Enfoques de la ecuación de segundo grado

No cabe duda de la importancia de conocer la fórmula de la ecuación de segundo grado, hasta tal punto que en regiones donde se utiliza el alemán como lengua vehicular se la conoce como ‘fórmula de la medianoche’, en el sentido de que es algo que se aprende de memoria, de forma que, si alguien llama a tu puerta a horas intempestivas, debes ser capaz de evocarla. No obstante, esta forma de resolución, aun siendo válida, no conecta con los conocimientos previos que tiene el alumnado sobre el concepto de resolver una ecuación ni con otros conocimientos matemáticos involucrados. Por lo tanto, solo se les dotaría de un algoritmo con un nivel de comprensión bajo que memorizan sin darle ningún sentido. Según Ruiz Martín (2020) se aprende pensando, es decir, incentivando “que el estudiante busque activamente significado al objeto de aprendizaje tratando de relacionarlo con sus conocimientos previos, reflexionando sobre sus consecuencias respecto a lo que ya sabe, y, en definitiva, pensando sobre ellas” (p. 55). Siguiendo esta línea, junto con las aportaciones de Socas (2011) sobre la enseñanza del álgebra en la Educación Básica, en esta sección se recoge una revisión de los diferentes enfoques de la ecuación de segundo grado que constituye una propuesta didáctica porque se describe en el orden en el que se impartiría, admitiendo todo tipo de organización en cuanto a los agrupamientos del alumnado. Esta propuesta también se apoya en el aprendizaje por descubrimiento guiado en todo momento por el docente, que es mejor opción que dejar al alumnado que experimente por su cuenta, disponiendo únicamente de los recursos (Alfiere et al., 2011), de manera que el conocimiento adquirido se almacene en la memoria semántica y no solamente en la episódica.

Así pues, se proponen actividades secuenciadas encaminadas a la detección de modelos con determinadas características matemáticas para fomentar las competencias asociadas del álgebra, en las que los estudiantes exploran, modelizan situaciones, hacen predicciones, discuten, argumentan y comprueban ideas, a la vez que practican el cálculo y en ocasiones, utilizan la tecnología como mediador. En ellas, se tiene en consideración el análisis realizado por Socas (2011) para mejorar el desarrollo del currículo respecto a los conocimientos del álgebra. Con todo lo anteriormente expuesto, se pretende garantizar la adquisición de conceptos, competencias y habilidades cognitivas por parte del alumnado, para conseguir un aprendizaje profundo y de calidad, realizando con ello un esfuerzo productivo.

En todo lo que sigue se utiliza como referencia el sistema educativo español donde la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) comprende cuatro cursos académicos (de 12 a 16 años).

2.1. Primer contacto con la ecuación de segundo grado

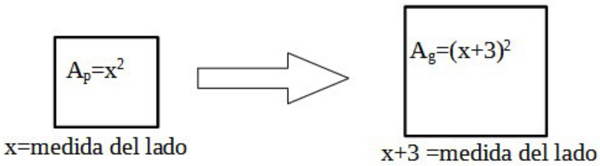
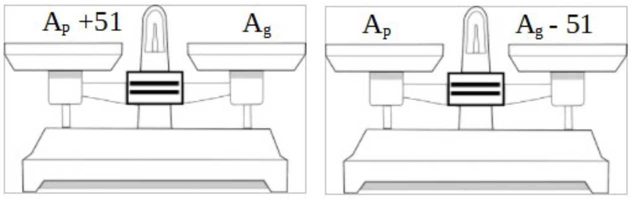
La cuestión que se plantea es cómo introducir la ecuación de segundo grado conectando con los conocimientos previos que poseen sobre la resolución de la ecuación de primer grado en línea con las ideas de Ruiz Martín (2020) para facilitar el que pueda ser recordada. Por ello, se propone al alumnado la resolución de un problema donde, en principio, la ecuación resultante del planteamiento es de segundo grado, pero al realizar la simplificación resulta una simple ecuación de primer grado. El curso apropiado para introducir la ecuación de segundo grado es segundo de ESO.

En la figura 1 se incluye un ejemplo de enunciado y la guía para su resolución que constituye un organizador de problemas con dos objetivos. El primero es forzar el camino de resolución para que entiendan la tarea y realicen todos los pasos de forma consecutiva y sin saltos, y el segundo, asegurar que escriben todas las ideas, relacionándolas y formalizándolas en el papel, conforme con las estrategias del pensamiento visual (en adelante VTS) y del pensamiento visible. El pensamiento visual se refiere a la capacidad de transmitir o percibir las palabras a través de imágenes, mientras que el pensamiento visible hace referencia a las representaciones gráficas de las ideas. Utilizar estrategias basadas en ambos tipos de pensamiento acelera el proceso de comprensión (Giaquinto, 2007; Perkins, 2008). El organizador de problemas constituye en sí una rutina de pensamiento.

Ahora es el momento de que el alumnado llegue a la conclusión de que hay diferentes tipos de ecuaciones de segundo grado. Para ello, se plantean tres enunciados que correspondan a incompleta con el término en x con coeficiente cero (Ecuación 1), incompleta con el término independiente igual a cero (Ecuación 2) y una completa (Ecuación 3). Se pide que hagan la transcripción al álgebra siguiendo los pasos 1 y 2 de la figura 1.

En el caso de la primera ecuación, la mayoría de los estudiantes intentarán seguir las estrategias que conocen de la ecuación de primer grado, es decir, despejar x^2 y aplicar raíces en ambos lados de la igualdad. No es seguro que todos aporten la solución negativa. En la segunda ecuación se ponen en marcha conocimientos sobre cuándo un producto da como resultado el número cero, además de la propiedad distributiva. Para el tercer caso, no encontrarán respuesta con los conocimientos previos. De esta forma se genera una cuestión para ellos sin resolver. Es, en definitiva, la forma en la que se trabaja en matemáticas de alto nivel. Para seguir afianzando lo aprendido se presentan más enunciados de ecuaciones del tipo 1 y 2.

Figura 1. Conexión con la ecuación de primer grado

Si aumentamos en 3 cm el lado de un cuadrado, obtenemos otro cuadrado con 51 cm^2 más de área. ¿Cuánto mide el lado del primer cuadrado?.	
PASO 1 Expresar en lenguaje algebraico el enunciado.	
PASO 2 Planteamos la ecuación.	Equilibrando ambos lados de la balanza  $x^2 + 51 = (x+3)^2$ $\quad$ $x^2 = (x+3)^2 - 51$
PASO 3 Ajustar y Resolver la ecuación.	$x^2+51=(x+3)^2$ $x^2+51=x^2+6x+9$ $51=6x+9$ $42=6x$ $7=x$
PASO 4 Dar la solución.	La medida del lado del cuadrado es de 7 cm

Fuente: elaboración propia.

A continuación se tiene como objetivo analizar los resultados obtenidos utilizando la rutina de pensamiento compara y contrasta. Con ello deducen que, si existen soluciones en la Ecuación 1, ambas son opuestas y también que en la Ecuación 2 siempre una de las soluciones es cero y la otra se obtiene fácilmente resolviendo una sencilla ecuación de primer grado.

También, se pone en conexión otro conocimiento previo relacionado con el uso y significado del signo igual, cuyo símbolo = fue recogido por primera vez por Robert Recorde en su libro *The Whetstone of Witte* en 1557. El caso del igual de la ecuación de segundo grado hace referencia al enunciado de un problema que consiste en hallar los valores de la variable que verifican la relación determinada (Alsina, 2009).

Para dar luz a la cuestión que ha quedado por resolver, se lanza la siguiente pregunta: ¿Se podría utilizar alguna de las dos estrategias anteriores? Es decir, ¿se podría, mediante transformaciones, poner la incógnita dentro de un cuadrado a un lado de la ecuación y así poder aplicar raíces en ambos lados como hemos hecho en la Ecuación 1? o tal vez, ¿podríamos expresar la ecuación como un producto igualado a cero, como hemos hecho en la de tipo 2? Con estas preguntas se genera debate entre el alumnado.

2.2. Método de la factorización con apoyo en simulaciones y relación con las fórmulas de Cardano-Viète

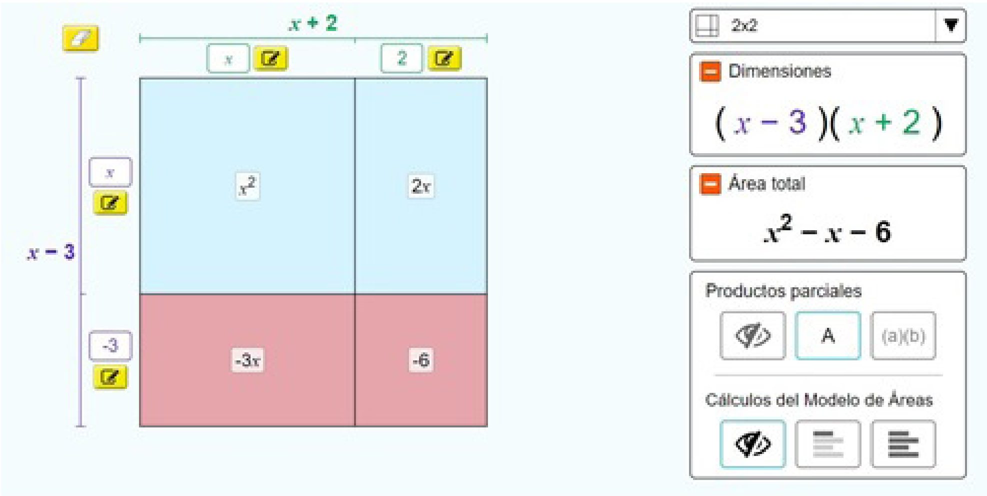
A las preguntas realizadas anteriormente, algunos estudiantes responderían que les resultaría más fácil intentar la resolución por la vía de la factorización, quizá por la activación del conocimiento previo de la factorización de números enteros como técnica.

En general, al preguntar sobre qué recuerdan de la factorización en primero de Educación Secundaria Obligatoria, es posible que observemos que han tenido una perspectiva incompleta del sentido numérico en la etapa de Educación Primaria, donde se suele potenciar el pensamiento operacional para la aritmética lo que dificulta el progreso en la adquisición de las formas de pensamiento algebraicos.

En consecuencia, se propone como primer objetivo presentar una actividad para que, mediante la utilización de la herramienta tecnológica de las simulaciones, los estudiantes generalicen los patrones numéricos y geométricos y las propiedades que observan para cualquier número real desconocido x, es decir, una transición de la aritmética al álgebra. Asimismo, podrán entender el concepto de factorización y cómo simplificar una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», llamados factores.

Para este propósito, se utiliza el proyecto de simulaciones llamado *PhEt Interactive Simulations*. Fue fundado en 2002 por Carl Wieman, ganador del Premio Nobel de Física. En el apartado simulaciones matemáticas, Modelo de Áreas: Álgebra, la página presenta el concepto de área de un rectángulo que se descompone en dos cuadrados y dos rectángulos de la misma área. Con la simulación se relaciona el área total del rectángulo con dos expresiones distintas; por un lado, como producto de sus dimensiones y por otro, como suma de las áreas de las diferentes figuras que lo descomponen. Para agilizar el proceso de representación PhEt Interactive Simulations (2022) incluye múltiples simulaciones. En particular, para el objetivo de la factorización se propone el uso de la simulación de la figura 2.

Figura 2. Simulación para comprender la factorización



Fuente: PhEt Interactive Simulations, 2022.

Además, esta simulación da pie a la creación de un tipo de juego en la línea de los Sudokus. Los estudiantes pueden crear sus propios rectángulos y no es imprescindible el uso de recursos digitales. También para la asimilación y consolidación de este concepto la plataforma proporciona un juego con diferentes niveles de dificultad. Una vez que los estudiantes han trabajado con estos juegos han de saber formalizar estas ideas en el papel y seguir con el proceso de resolución de la ecuación de segundo grado como ya hacían en la Ecuación 2.

Otro objetivo del docente es guiar al alumnado para que a través de la observación de patrones llegue a las fórmulas de Cardano-Viète.

Por último, se añade una dificultad deseable (Borky, E. L. & Bjork, R. A., 2014) como reto que nos servirá para introducir una técnica muy utilizada en diferentes ámbitos del aprendizaje de las matemáticas como es el cambio de variable. Ahora, se propone resolver la ecuación 6x^2+13x+6=0 y el docente deberá preguntar qué dificultades han encontrado con respecto a las anteriores. Muchos seguramente expresarán su frustración ante tantas posibilidades de combinación a la hora de realizar la factorización mediante el método aprendido. Ante tal necesidad, por parte de algunos estudiantes, se guiaría al alumnado con los siguientes pasos: Paso 1: multiplicar por 6 a ambos lados de la igualdad; (6x)^2+13·6x+36=0; Paso 2: Cambio de variable 6x=y; y^2+13y+36=0.

Así, se han librado de la dificultad que tenían al principio, factorizan la nueva ecuación y deshacen el cambio para finalizar el proceso. Con esta propuesta, se ha dotado al estudiante de autonomía para decidir qué estrategia utilizar, según su proceso de aprendizaje, su habilidad y su confianza. Es aconsejable trabajar primeramente con ecuaciones que tengan solución. Este método es adecuado para el segundo curso de ESO.

2.3. Método completando cuadrados con apoyo de simulaciones

Siguiendo con la idea del aprendizaje secuenciado según su complejidad, cocimientos previos adquiridos y maduración cognitiva del estudiante, se puede introducir el enfoque de completar cuadrados para la resolución de la ecuación de segundo grado, que sería la respuesta a la pregunta: ¿Se podría, mediante transformaciones, poner la incógnita dentro de un cuadrado a un lado de la ecuación y así poder aplicar raíces en ambos lados como hemos hecho en la Ecuación1? (planteada al final del epígrafe 2.1).

En este caso también se puede hacer uso de la tecnología de las simulaciones de PhEt Interactive Simulations (2022), para que el alumnado mediante la exploración, la observación de patrones, la discusión y argumentación con sus compañeros comprueben las ideas que llevan a las identidades notables.

Una vez conocidas e interpretadas en una dirección, se propone mediante diferentes actividades, invertir el proceso, es decir, que del trinomio cuadrado perfecto lleguen al cuadrado de una suma o de una diferencia.

También, es importante hacer actividades donde se les dé un trinomio incompleto y ellos tengan que encontrar el término constante necesario para obtener un trinomio cuadrado perfecto, $x^2+12x+\square$, otras en las que identifiquen cuáles de los trinomios dados son perfectos y cuáles no y también algunas en las que deben agregar términos que falten para que se cumpla la igualdad, , $(x+4)^2=\square+8x+\square$.

Cuando se comprueba que todo lo anteriormente mencionado está asimilado por parte del alumnado, mediante diferentes evidencias, procederemos a utilizar esta técnica como otra herramienta para la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Se puede seguir una casuística basada en la dificultad de completar el trinomio cuadrado perfecto, es decir, considerando los casos siguientes:

Caso 1: a=1 y b=par; Caso 2: a=1 y b=impar;

Caso 3: a≠1 y b=par; Caso4: a≠1 y b=impar.

En todos los casos, una posible opción para ayudar a los estudiantes a visualizar los pensamientos sería crear una columna para describir las opciones realizadas. Además, es una evidencia que permite al docente verificar que están pensando en el objeto de aprendizaje.

En el caso 1, a=1 y b=par, con todo el trabajo previo realizado, los estudiantes resuelven la ecuación de forma autónoma (véase la figura 3).

Figura 3. Caso 1

$$x^2-6x+8=0$$
$$\begin{array}{c|rcl}
-8 & x^2-6x & = & -8\\
9 & x^2-6x+9 & = & 1\\
C & (x-3)^2 & = & 1\\
\sqrt{\square} & x-3 & = & \pm 1\\
3 & x & = & 3\pm 1\\
 & x=3+1=4 & & x=3-1=2
\end{array}$$

$$x^2-4x+4=0$$
$$\begin{array}{c|rcl}
-4 & x^2-4x & = & -4\\
4 & x^2-4x+4 & = & 0\\
C & (x-2)^2 & = & 0\\
\sqrt{\square} & x-2 & = & 0\\
2 & x & = & 2\\
 & x=2 & & x=2
\end{array}$$

$$x^2-4x+21=0$$
$$\begin{array}{c|rcl}
-21 & x^2-4x & = & -21\\
4 & x^2-4x+4 & = & -17\\
C & (x-2)^2 & = & -17\\
\sqrt{\square} & x-2 & = & \sqrt{-17}\\
 & \nexists \text{ solución} & &
\end{array}$$

Fuente: elaboración propia.

En los casos 2 y 3, a=1 y b=impar y a≠1 y b=par, se debe guiar al alumnado mediante preguntas abiertas para completar con éxito el trinomio cuadrado perfecto. En ambos casos, se añade una única acción según la necesidad (véase la figura 4).

Por último, se llega al caso 4, a≠1 y b=par, que llevará a deducir la fórmula general. En este caso, hay que añadir de forma conjunta y consecutiva las dos acciones anteriormente trabajadas (véase la figura 5). Por último, sustituyendo los números por letras se llega a la archiconocida fórmula.

Figura 4. Caso 2 y Caso 3

$$x^2-5x+6=0$$

-6	x^2-5x	$=-6$
$\cdot 4$	$(2x)^2-2\cdot 5\cdot(2x)$	$=-24$
25	$(2x)^2-2\cdot 5\cdot(2x)+5^2$	$=1$
C	$(2x-5)^2$	$=1$
$\sqrt{\square}$	$2x-5$	$=\pm 1$
5	$2x$	$=5\pm 1$
$:2$	x	$=\frac{5\pm 1}{2}$

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$3x^2-10x+7=0$$

-7	$3x^2-10x$	$=-7$
$\cdot 3$	$(3x)^2-2\cdot 5\cdot(3x)$	$=-21$
25	$(3x)^2-2\cdot 5\cdot(3x)+5^2$	$=-21$
C	$(3x-5)^2$	$=4$
$\sqrt{\square}$	$3x-5$	$=\pm 2$
5	$3x$	$=5\pm 2$
$:3$	x	$=\frac{5\pm 2}{3}$

$$x=\frac{5+2}{3}=\frac{7}{3}$$

$$x=\frac{5-2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Fuente: elaboración propia.

Figura 5. Caso 4

$$3x^2+15x+18=0$$

-18	$3x^2+15x$	$=-18$
$\cdot 3$	$(3x)^2+15\cdot 3x$	$=-54$
$\cdot 4$	$(6x)^2+2\cdot 15\cdot(6x)$	$=-216$
225	$(6x)^2+2\cdot 15\cdot(6x)+15^2$	$=9$
C	$(6x+15)^2$	$=9$
$\sqrt{\square}$	$6x+15$	$=\pm 3$
-15	$6x$	$=-15\pm 3$
$:6$	x	$=\frac{-15\pm 3}{6}$

$$x=\frac{-15+3}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$

$$x=\frac{-15-3}{6}=\frac{-18}{6}=-3$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$-c$	ax^2+bx	$=-c$
$\cdot a$	$(ax)^2+bax$	$=-ac$
$\cdot 4$	$(2ax)^2+2b(2ax)$	$=-4ac$
b^2	$(2ax)^2+2b(2ax)+b^2$	$=b^2-4ac$
C	$(2ax+b)^2$	$=b^2-4ac$
$\sqrt{\square}$	$2ax+b$	$=\pm\sqrt{b^2-4ac}$
$-b$	$2ax$	$=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$
$:2a$	x	$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Fuente: elaboración propia.

Si se quiere agregar, en este apartado, alguna dificultad deseable en algunos estudiantes, más avanzados, se puede proponer otra forma de completar cuadrados en la que aparecen números fraccionarios, que conlleva mayor complejidad, como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Completar cuadrados con fracciones

$$2x^2-7x+3=0$$

-3	$2x^2-7x = -3$
$\cdot 2$	$4x^2-2\cdot 7\cdot x = -6$
$\cdot 4$	$(4x)^2-2\cdot 7\cdot (4x) = -24$
49	$(4x)^2-2\cdot 7\cdot (4x)+7^2 = 25$
C	$(4x-7)^2 = 25$
$\sqrt{\square}$	$4x-7 = \pm 5$
7	$4x = 7\pm 5$
$:4$	$x = \frac{7\pm 5}{4}$

$$x=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$$
$$x=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$2x^2-7x+3=0$$

SFC	$2\left[x^2-\frac{7}{2}x\right]+3 = 0$
$\frac{49}{16}$	$2\left[x^2-2\cdot\frac{7}{4}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2\right]+3 = 0$
	$2\left[x^2-2\cdot\frac{7}{4}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right]-\frac{49}{8}+3 = 0$
C	$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{8}+\frac{24}{8} = 0$
	$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{8} = 0$
$\frac{25}{8}$	$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$
$:2$	$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$
$\sqrt{\square}$	$x-\frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$
$\frac{7}{4}$	$x = \frac{7\pm 5}{4}$

Fuente: elaboración propia

Con lo expuesto en los epígrafes anteriores se ha dotado al alumnado de distintos métodos de resolución de la ecuación de segundo grado, donde pueden elegir según lo necesiten. El método explicado en este epígrafe es adecuado para tercero de ESO.

2.4. Método Pop Shen Loh

Una vez se ha dado respuesta a todas las preguntas surgidas, se va un poco más allá dando a conocer el trabajo de Po Shen Loh (2019) quien ha impulsado una forma más simple de resolver la ecuación de segundo grado.

El nuevo enfoque es sencillo y se vincula a diferentes conocimientos previos trabajados en cursos anteriores, las fórmulas de Cardano-Viète y las identidades notables.

Para ejemplificar este método se incluye la resolución de la siguiente ecuación: : 2x^2-7x+3=0.. El primer paso consiste en dividir por 2 para obtener la ecuación equivalente x^2-7/2 x+3/2=0

Como las soluciones de la ecuación cumplen que su suma vale 7/2 y su producto 3/2 , la clave está en utilizar la primera condición de la siguiente manera: si su suma vale 7/2 entonces su media aritmética es 7/4. Como consecuencia, ambas soluciones distan la misma cantidad *u* de ésta. De aquí, las soluciones de la ecuación se expresan como 7/4-u y 7/4+u.

A continuación, se impone la segunda condición y se obtiene la ecuación de segundo grado (7/4-u)(7/4+u)=3/2 de fácil resolución. Se guía a los estudiantes para que utilicen la misma organización del espacio de las figuras anteriores con los siguientes pasos: P1 cambio de expresión con identidad notable, (7/4)^2-u^2=3/2; P2 despejar, u^2,25/16=u^2; P3 aplicar raíces a ambos lados de la igualdad, , ±5/4=u..

Por último, queda realizar unos sencillos cálculos para obtener las soluciones:

x=7/4+5/4=12/4=3 y x=7/4-5/4=2/4=1/2.

Este método se considera adecuado para cuarto curso de ESO.

2.6. Método de la fórmula

La aplicación de la fórmula es un método en el que se trabaja el cálculo del valor numérico de una expresión. Aquí, es importante que los estudiantes identifiquen correctamente los coeficientes de la ecuación. Se pueden utilizar unas plantillas de forma que se visualice qué permanece siempre en la fórmula y qué cambia dependiendo de la ecuación. Las plantillas se superponen y se puede trabajar de forma manipulativa. Para hacer estas plantillas se escribe la fórmula: $x=(-b\pm\sqrt{}(b^{\wedge}2-4\cdot a\cdot c))/(2\cdot a)$

en una hoja de papel tamaño A4. Se colorean de distinto color las letras *a, b* y *c* y en otra hoja A4 se coloca la misma fórmula y se recortan las letras *a, b* y *c*. La fórmula quedaría así: $x=(-\square\pm\sqrt{}(\square^{\wedge}2-4\cdot\square\cdot\square))/(2\cdot\square)$.

El reconocimiento de los coeficientes de la ecuación sirve para saber utilizar la aplicación de las calculadoras científicas, como CASIO, para resolver ecuaciones, introduciendo sus coeficientes. Asimismo, se puede proponer la comprobación con la calculadora de las ecuaciones realizadas en el papel.

2.7. Modelización matemática y conexión con otras materias

La habilidad para utilizar modelos matemáticos forma parte de la competencia matemática descrita en la Recomendación de la Unión Europea y del Consejo C189/1. Blum y Leiβ (2007) distinguen siete fases en el proceso de modelización: Comprensión del problema, Simplificación/Estructuración, Matematización, Trabajo matemático, Interpretación, Validación y Exposición. Para iniciar un proceso de modelización se debe proponer una situación en la que intervenga un problema susceptible de ser matematizado. Al resolver el problema se pone en acción la competencia matemática y el resto de las competencias de forma transversal, unas más que otras dependiendo de cómo se dirija la tarea. La situación puede ser de un contexto real o de un contexto imaginario.

Asimismo, puede estar relacionado con contenidos de otras materias donde se utiliza la función cuadrática: el movimiento rectilíneo uniforme acelerado, la energía cinética de un cuerpo en función de la velocidad, la energía potencial elástica de un muelle en función de la distancia a la posición de equilibrio, el momento de inercia de un cilindro macizo que gira alrededor de su eje de simetría en función del radio, etc.

Como ejemplo de problema de modelización que puede plantearse, se propone averiguar la distancia máxima que hay desde la carretera a un punto de una estructura con forma parabólica, suponiendo que no se puede medir directamente.

En la guía de resolución se proponen las siguientes preguntas:

1. ¿Qué medidas se pueden tomar?
2. ¿Dónde colocamos los ejes de coordenadas?
3. ¿Conocemos algunos puntos por donde pasa la parábola?
4. ¿Se puede plantear una ecuación de segundo grado relacionada con el problema?
5. ¿Hay más de una ecuación?
6. Encuentra la función cuadrática que modeliza la estructura.
7. ¿Necesitarías hacer más mediciones?
8. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
9. Comprueba tu solución con la de tus compañeros.

Para guiar al alumnado se tienen en cuenta todas las ideas expuestas por Borromeo-Ferri (2018) sobre la modelización matemática. En su trabajo explica que los pasos en el ciclo de modelización pueden ocurrir en distinto orden.

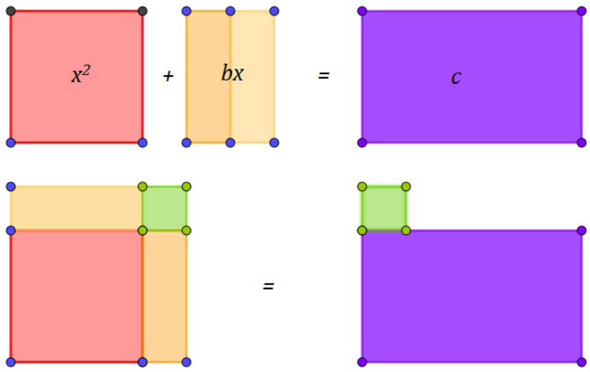
El problema admite varios planteamientos y la solución aportada dependerá de las estimaciones consideradas. Pueden estimar el ancho de la carretera teniendo en cuenta que es una autovía y también se puede guiar para que coloquen el eje horizontal en la recta que une los puntos de corte de la estructura con la carretera. El eje vertical se puede colocar en la recta perpendicular que pasa por uno de los puntos anteriores. Una vez que se plantea una ecuación con soluciones en las abscisas de los puntos de corte anteriores, se podrá obtener la función cuadrática que corresponde. En la abscisa del punto medio de los puntos de corte, la función cuadrática alcanza el máximo. Si *m* es la anchura de la autovía, es la ecuación general que responde a la pregunta 4. Para determinar el valor de *a* se podría medir la altura en un punto más bajo que estuviese accesible. Este problema es adecuado para tercero y cuarto de ESO.

2.8. El origen, un poco de historia de las matemáticas

Aprovechando la historia de las matemáticas se puede integrar el desarrollo de la competencia en conciencia y expresiones culturales aparte de comprender cómo se produjo un conocimiento concreto. La ecuación de segundo grado como un problema que ya pensaron los egipcios y los babilonios a través de enunciados cuyo planteamiento formal se expresa con una ecuación de segundo grado. Resolvieron algunas ecuaciones con coeficientes particulares, pero no dieron con la fórmula general (Boyer, 1987). El matemático indio Bhaskara II fue el primero en deducir la fórmula general en el siglo XII (Puttaswamy, 2012).

Como actividad asociada se puede proponer a los estudiantes que hagan un resumen breve de la historia de la ecuación de segundo grado a partir de referencias fiables aportadas por el docente. La presentación admite diferentes formatos y posibilidades. También se podrían realizar actividades con perspectiva geométrica siguiendo el modelo desarrollado por los escribas babilónicos (Radford y Guérette, 2000). Se trata de un método gráfico que utiliza el concepto de área y que en realidad se sustenta en el método de completar cuadrados (véase la figura 7).

Figura 7. Método geométrico babilónico



Fuente: elaboración propia con Geogebra, International Geogebra Institute, 2022.

2.9. Utilización de la función cuadrática y Geogebra

La función cuadrática en Educación Secundaria Obligatoria se representa sin necesidad de ninguna aplicación informática a partir del estudio de los puntos de corte con los ejes, el vértice y la observación del signo del coeficiente principal del polinomio. Es en el estudio de los puntos de corte con el eje X donde interviene la resolución de una ecuación de segundo grado. Apoyado en la aplicación Geogebra se pueden estudiar los tres casos posibles de tipos de soluciones, que se convierten en seis si tenemos en cuenta el signo del coeficiente principal, es decir los casos que se muestran en la figura 8. La práctica tendría dos fases. En una primera fase se plantean seis ecuaciones:

x^2-7x+10=0; x^2-7x+15=0;-x^2+24x-140=0;

-(x-12)^2=0; (x-3,5)^2=0; -x^2+24x-145=0

Los estudiantes deben resolverlas en papel. A continuación se pide que representen las funciones:

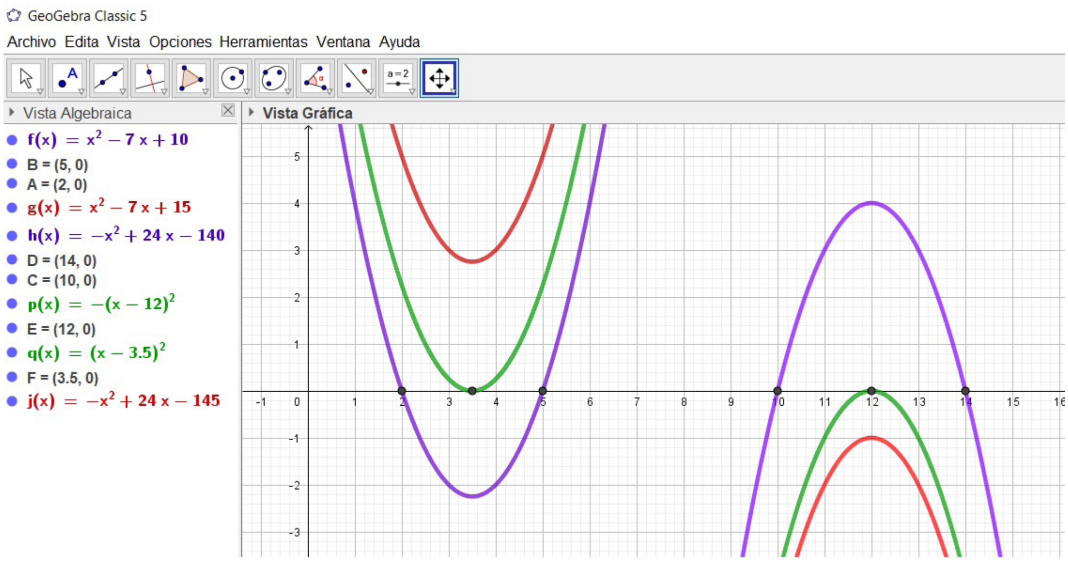
f(x)=x^2-7x+10; g(x)=x^2-7x+15;h(x)=-x^2+24x-140;

p(x)=-(x-12)^2; q(x)=(x-3,5)^2; j(x)=-x^2+24x-145

Finalmente, aplican la herramienta intersección de Geogebra para establecer conclusiones sobre la relación entre la abscisa de los puntos de corte de la gráfica con el eje X y las soluciones de las ecuaciones anteriores. Se puede trabajar en parejas y como producto final se pide un documento que contenga los enunciados, capturas de pantalla y las conclusiones obtenidas.

Esta actividad es adecuada para tercero y cuarto de ESO.

Figura 8. Interpretación de los tipos de solución de una ecuación de segundo grado.



Fuente: elaboración propia con Geogebra, International Geogebra Institute, 2022.

2.10. El pensamiento computacional

En cada uno de los enfoques anteriormente tratados se ha puesto en marcha también la adquisición y desarrollo del pensamiento computacional, ya que se pueden considerar como tareas asociadas a este tipo de pensamiento. Según Zapata (2015), existen diferentes componentes del pensamiento computacional: el análisis ascendente y descendente, la heurísitca, el pensamiento divergente, la creatividad, la resolución de problemas, el pensamiento abstracto, la recursividad, la iteración, los métodos por aproximaciones sucesivas de ensayo-error, así como también, los métodos colaborativos, búsqueda de patrones, sinéctica y la metacognición.

Haber desarrollado el pensamiento computacional, no solamente significa haber aprendido a programar en un determinado lenguaje, sino que engloba haber adquirido una serie de habilidades para comprender el mundo que nos rodea y a nosotros mismos haciendo uso de los fundamentos de la informática. Esto conlleva saber estructurar el pensamiento y ordenar los elementos que forman parte de un problema para conseguir resolverlo de la forma más eficaz.

El trabajo en papel sin y con apoyo de simulaciones y aplicaciones informáticas ayudarán a fomentar esta forma de pensamiento. Para complementar los diferentes enfoques, se propone que los estudiantes desarrollen un programa con Scratch (2022) que sirva para resolver ecuaciones de segundo grado dados sus coeficientes, que podrían abordarlo estudiantes de tercero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria. Más aún, con la programación se refuerza el concepto de variable.

3. Recogida de datos

3.1 Metodología

En este apartado se incluye un estudio descriptivo exploratorio sobre los conocimientos en torno a la ecuación de segundo grado que el alumnado de cuarto de Educación Secundaria ha asimilado. Se utilizó un diseño de tipo exploratorio simple para llevar a cabo un estudio descriptivo.

El muestreo fue no probabilístico por conveniencia. La muestra estuvo formada por 108 estudiantes distribuidos en grupos diferentes de dos centros de Educación Secundaria de España que cursaban la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en el curso 2021/22 en el segundo trimestre. El cuestionario fue realizado de forma voluntaria en los propios centros, ya que se pensó que la encuesta sería más objetiva si no la realizaban en casa donde podrían estar influenciados por sus familiares.

Las estrategias de enseñanza utilizadas con estos estudiantes sobre la temática de las preguntas fueron las clásicas recogidas en los libros de texto actuales. El instrumento utilizado fue una encuesta formada por 12 preguntas de opción múltiple, en 10 de ellas con una única respuesta verdadera, con el fin de recoger información sobre la utilización de herramientas TIC, conocimiento de la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado, conocimiento de otros métodos de resolución, distinción entre ecuación completa e incompleta, grado de adquisición del concepto de solución de una ecuación de segundo grado, reconocimiento de las soluciones a partir de las fórmulas de Cardano-Viète, y cultura sobre la historia de las matemáticas conseguida.

3.2. Análisis de resultados

Los datos fueron analizados con el paquete estadístico SPSS y Excel. Además de los estadísticos descriptivos, también se llevó a cabo un análisis correlacional bivariado de las variables objeto de estudio, calculando los coeficientes de correlación de Pearson y también los coeficientes de Rho Spearman.

3.3. Resultados

En las tablas 1, 2 y 3 se incluyen las preguntas con el número de estudiantes y porcentaje que contestaron esa opción. Aparece en negrita la respuesta correcta.

En el análisis de correlaciones bivariado se ha obtenido que existe una correlación débil, con correlación de Pearson entre 0,3 y 0,5, entre las variables: P10 y P03, P7 y P11, y P07 y p12.

El resto de los coeficientes de correlación de Pearson tienen valor absoluto menor a 0,3. Utilizando Rho de Spearman se obtienen coeficientes de correlación inferiores a 0.35 en valor absoluto para dos variables distintas. Por tanto, no existe una correlación fuerte entre las variables. Se observa que el mayor porcentaje de acierto está en la pregunta P10 sobre identificación de ecuación completas e incompletas.

En la tabla 1 se recogen los resultados sobre conocimientos de estrategias, fórmulas de Cardano-Viète, características de una ecuación de segundo grado y utilización de TIC.

Solamente el 31,5% conoce varios métodos de resolución, destacando que el 37 % no recuerda otra herramienta dada en clase que no sea la fórmula, junto con el 13,9 % que piensa que es el único método de resolución. La mayoría conoce que hay una relación entre el producto y la suma de las soluciones con la ecuación de segundo grado, pero solamente el 18,5 % conoce la relación correcta.

En los libros de texto se trabaja bastante la caracterización de la ecuación de segundo grado con ejercicios de obtención de los coeficientes correspondiente al monomio de grado 2, del monomio de grado 1 y el término independiente. Seguramente por esta razón, el 50 % sabe identificar una ecuación de segundo grado.

Aplicaciones tales como Geogebra, Microsoft Math y Photomath están adquiriendo mucho protagonismo en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Los estudiantes suelen acudir a ellas ante un bloqueo u obstáculo o simplemente para la comprobación. En la tabla 1 recogemos también información acerca de la popularidad que tienen estas tres aplicaciones entre los estudiantes de la muestra.

Tabla 1. Preguntas P01-P04

P01. ¿La fórmula de ecuación de segundo grado es el único método para resolver ésta?	**%**	**P02.La ecuación cuadrática cuyas raíces son *a* y *b* es...**	**%**
No, hay dos métodos distintos.	17,6%		**18,5%**
No lo sé. A mí solo me explicaron la fórmula.	37,0%		13,9%
No, hay varios métodos.	**31,5%**		7,4%
Sí, es el único método de resolución de ecuaciones de segundo grado.	13,9%		13,9%
			46,3%
P03.Una ecuación de segundo grado se caracteriza por...	**%**	**P04.¿Has utilizado alguna de estas aplicaciones para resolver ecuaciones de segundo grado?**	%
Porque hay un término que tiene la variable con exponente dos.		Geogebra	31,5%
Porque hay una raíz cuadrada		Microsoft Math.	0,9%
Porque hay una *x*		Otros	20,4%
Tener dos respuestas, una positiva y otra negativa		Photomath	47,2%

Fuente: elaboración propia.

La decepción llega cuando se comprueba que únicamente el 36,1% da la respuesta correcta a un problema de traducción al lenguaje algebraico y realización de unas operaciones sencillas en un contexto de geometría (véase la tabla 2).

Tabla 2. Preguntas P05-P08

P05. En un rectángulo donde el largo es 3 unidades mayor que su ancho y su área es igual a 30. ¿Cuál es la ecuación que permite calcular los lados del rectángulo?	%	**P06. El cuadrado de un número menos 21 es igual a 100. ¿De qué número se trata?**	%
No responden	4,6%	El número buscado es el 11.	38,9%
	10,2%	**Hay dos números que cumplen la condición el 11 y -11.**	**48,1%**
	36,1%	La solución es el número 79.	6,5%
	16,7%	No existe solución.	6,5%
Ninguna de las anteriores.	32,4%		
P07. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación ?	%	**P08. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación (?**	%
La única solución es 3.	13,9%	Lo puedo hacer sin aplicar la fórmula	3,7%
Son -3 y 1.	16,7%	2 y 4	61,1%
Son 3 y 1.	**43,5%**	-2 y -	8,3%

Son 3 y 1. Se deduce con la fórmula únicamente.	25,9%	**Las dos primeras son correctas.**	**26,9%**

Fuente: elaboración propia.

En la pregunta 6 (P06) se recoge un problema de transcripción directa del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico y resolución de la ecuación. El 13% no ha dado ninguna solución correcta y el 58,9 % no ha obtenido la solución negativa.

En las respuestas de las preguntas 7 y 8 (P07 y P08) se aprecia que un porcentaje elevado no conoce las técnicas de igualar cuadrados y tampoco las de resolver una ecuación de segundo grado donde el polinomio está factorizado. Muchos de los que han llegado a la solución lo habrán hecho sustituyendo los valores de las opciones, es decir, a partir del valor numérico del polinomio.

En la tabla 3 se recogen los resultados sobre el recuerdo de la fórmula, la distinción de ecuaciones completas e incompletas, la historia de las matemáticas y la determinación del número de soluciones.

Según los resultados recogidos, el 65,7 % de los estudiantes creen recordar la fórmula, sin embargo, dados los resultados anteriores no deben recordarla muy bien o probablemente no saben cómo llegar a la ecuación canónica de segundo grado para poder aplicarla.

Tabla 3. Preguntas P09-P12

P09.¿Recuerdas la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado?	%	**P10. Señala la ecuación de segundo grado completa.**	%
La recuerdo, pero tengo alguna duda	25,0%		5,6%
No, no la recuerdo	9,3%		3,7%
Sí, la recuerdo correctamente	65,7%		23,1%
			67,6%
P11. ¿Quién tuvo que ver con la fórmula de la ecuación de segundo grado?	%	**P12¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado?**	
Bhaskara II	**26,9%**	**Puede tener una solución doble, dos distintas o ninguna.**	**57,4%**
Hardy	34,3%	Tiene dos soluciones diferentes o ninguna solución.	13,0%
Lagrange	28,7%	Tiene siempre dos soluciones.	25,0%
Weierstrass	10,2%	Tiene una única solución.	4,6%

Fuente: elaboración propia.

El hecho de la distinción entre ecuación de segundo grado completa e incompleta facilitará la elección del método más eficiente. Se observa que aproximadamente 2 de cada 3 son capaces de hacer esta distinción.

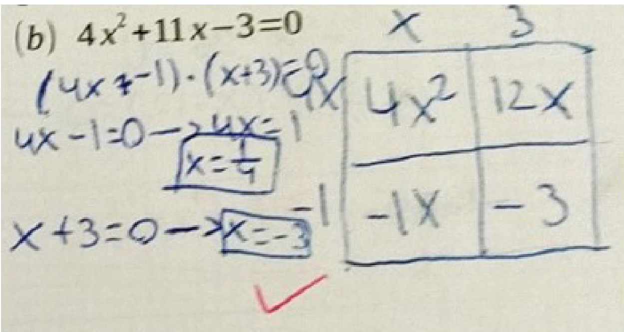
En relación con la historia de las matemáticas también están un poco confusos. Los libros de texto suelen recoger alguna sección con curiosidades matemáticas, pero muchas veces no se les dedica suficiente tiempo en el desarrollo de las unidades didácticas. Como refleja la tabla 3, el matemático Hardy es el más elegido.

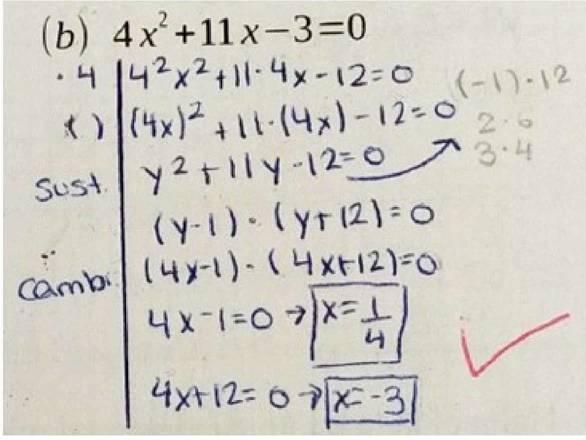
La discusión del número de soluciones de una ecuación de segundo grado es uno de los tópicos que contemplan a fondo los libros de texto. La tabla 3 indica que el 57,4 % conoce las posibles soluciones de una ecuación de segundo grado.

4. Experiencia de aula

En el tercer trimestre del curso 2021/22 se llevó al aula la propuesta explicada en el epígrafe 2.2 en grupo de segundo de ESO. En la figura 9 se recoge la resolución aportada por dos estudiantes distintos. Como puede observarse, cada estudiante realizó un procedimiento distinto para resolverla, según su propia adquisición de lo aprendido.

Figura 9. Soluciones apartadas por dos estudiantes diferentes





Fuente: elaboración propia a partir de los escritos de dos estudiantes.

5. Conclusiones

La ecuación de segundo grado requiere un tratamiento en el aula que va más allá de instruir en el conocimiento de la fórmula y su utilización, ofreciendo una muy buena oportunidad para conectar con otros contenidos en diferentes contextos y poniendo en marcha la adquisición de diversas competencias. Se ha tratado la ecuación de segundo grado desde el pensamiento computacional, el álgebra completando cuadrados, basado en las fórmulas de Cardano-Viète, con el método de la factorización, la geometría apoyada en la historia de las matemáticas, el análisis matemático con la función cuadrática, con la conocida fórmula hasta aplicaciones en la modelización matemática.

Los datos obtenidos reflejan que los conocimientos sobre la ecuación de segundo grado no se han consolidado debidamente en la muestra estudiada. Por ello, en la propia revisión de los métodos se explica cómo llevar a cabo una propuesta alineada con un aprendizaje basado en competencias. Un enfoque didáctico que contemple todas las perspectivas revisadas es claro que fomenta la adquisición de todas las competencias clave porque de alguna manera todas quedan implícitas. Se pone el punto de mira tanto en el proceso como en el resultado y se dan recomendaciones sobre el curso donde se podría aplicar.

En estas propuestas, cabe destacar el punto de vista gráfico que se propone a la hora de abordar las tareas, basado en la metodología VTS y el pensamiento visible, aportando una herramienta que ayuda a dividir un problema en subproblemas. Además, siempre se proponen niveles de dificultad deseables de manera que se evita el bloqueo de algunos estudiantes y en otros, más avanzados, sirven para aumentar el grado de dificultad para incentivar su motivación. La utilización de las TIC permite facilitar el paso de la aritmética al álgebra. En particular, resulta más sencillo trasladar conceptos como la factorización.

Por un lado, aprender diversas estrategias para resolver un problema aumenta la riqueza para argumentar y tener gusto por encontrar una forma de resolución original y elegante. De esta forma, los estudiantes aprenden a interpretar y elegir el procedimiento aportado por aplicaciones tales como Photomath. Por otro lado, las actividades incluidas pueden servir para disminuir el número de errores en álgebra, al trabajar el cuadrado de un binomio, se eliminaría el error que se comete al hacer su desarrollo. En un estudio de Ramos, Guifarro y Casas (2021) se obtuvo que más del 50% del alumnado de alto nivel tiene una creencia incorrecta del desarrollo del cuadrado de un binomio.

Por su parte, la experiencia llevada a cabo en el aula para un grupo de segundo de ESO de algunas de las actividades de la propuesta didáctica planteada da pie a conjeturar que será viable para otros grupos de estudiantes con características similares, ya que ha tenido muy buena acogida por parte del alumnado y se han obtenido los resultados esperados.

Esta nueva perspectiva de trabajo que se propone puede ser aplicada a otros saberes básicos del currículo. Es relativamente fácil encontrar múltiples recursos en internet, sin embargo, no lo es, encontrar guías didácticas que conecten estos recursos con el establecimiento curricular de la normativa. Asimismo, la muestra de alumnado estudiada presenta lagunas en el tópico de la ecuación de segundo grado y es posible que también ocurra lo mismo en otros grupos y con otros conceptos matemáticos. Harían falta más estudios para determinar exactamente el problema que subyace. Se podría llevar al aula la totalidad de la propuesta en distintos niveles y registrar los resultados obtenidos y los puntos tanto positivos como negativos. En definitiva, se deberían hacer más investigaciones sobre propuestas didácticas de matemáticas en un marco competencial que no se ciñan simplemente a las aplicaciones o a partes anecdóticas de proyectos interdisciplinares, poniendo el valor de las matemáticas en el desarrollo del pensamiento.

Referencias

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 1–18. https://doi.org/10.1037/a0021017

Alsina, C. (2009). *Los distintos iguales. La Gaceta de la RSME 12* (3), 557-571.

Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2014). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher and J. Pomerantz (Eds.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society (2nd edition).* (pp. 59-68). New York: Worth.

Boyer, C. B. (1987). Historia de la matemática. Alianza.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer International Publishing.

Blum, W. & Leib, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (eds), *Mathematical Modelling: Education, engineering, and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Dweck, C. (2017). *Mindset: La actitud del éxito*. Sirio SA.

Engel, S. (2011). Children's need to know: Curiosity in schools. *Harvard Educational Review, 81* (4), 625–645. https://doi.org/10.17763/haer.81.4.h054131316473115

Engel, S. (2015). *The hungry mind the origins of curiosity in childhood*. Harvard University Press.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*. Oxford University Press.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press.

International Geogebra Institute (2022). http://www.geogebra.org.

Masapanta, S. y Velázquez, J. (2017). Primeros pasos para una mejora en el uso de la taxonomía de Bloom en la enseñanza de la informática. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa, 26,* 1-12.

Microsoft Math (2022). Microsoft Math Solver. https://math.microsoft.com/es

Perkins, D. (2008). Making Thinking Visible. *Educational Leaderchip. Teaching students to think, 65* (5), 57-61.

PhEt Interactive Simulations (2022). Simulaciones. Modelo de Áreas: Álgebra. https://phet.colorado.edu/es/simulations/area-model-algebra

Photomath (2022). https://photomath.com/es

Puttaswamy, T. K. (2012). *Mathematical achievements of pre-modern Indian mathematicians*. Newnes.

Loh P. S. (2019). A simple proof of the quadratic formula. arXiv:1910.06709v2 [math.HO]. https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.06709

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: *A Babylonian approach. Paleontological Society Papers*, 6, 69-76.

Ramos, L., Guifarro, M. y Casas, L. (2021). Dificultades en el aprendizaje del álgebra, un estudio con pruebas estandarizadas. *Bolema, Rio Claro (SP),* 35 (70), 1016-1033. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a21

Recomendación del Parlamento Europeo y el Consejo, de 22 de mayo de 2018, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. *Diario Oficial de la Unión Europea C189/1*, 04 de junio de 2018. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/PDF/?uri=OJ:C:2018:189:FULL

Ruiz Martín, H. (2020). *¿Cómo aprendemos? Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza*. Graó.

Scratch (2022). https://scratch.mit.edu/

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 77, 5-34.

Trujillo-Segoviano, J. (2014). El enfoque en competencias y la mejora de la educación. *Ra Ximhai, 10*(5),307-322. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46132134026

von Stumm, S., Hell, B., & Chamorro-Premuzic, T. (2011). The hungry mind: Intellectual curiosity as third pillar of academic performance. *Perspectives on Psychological Science, 6*, 574-588. https://doi.org/10.1177/1745691611421204

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. *Revista de Educación a Distancia (RED), 46*(4). https://doi.org/10.6018/red/46/4