



ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA CON GEOGEBRA

Una guía didáctica desde el aula de clase

Teaching of the Concept of the Derivative with Geogebra: a Didactic Guide from the Classroom

VÍCTOR DANIEL GIL VERA

Universidad Católica Luis Amigó, Colombia

KEY WORDS

*Differential Calculus
Derivative
Didactics
Teaching Learning
Geogebra
Pedagogy*

ABSTRACT

Despite the different applications that the concept of derivative has in different areas of knowledge; exact and natural sciences, economics, engineering, administration, among others, numerous teaching experiences reveal that the majority of students of differential calculus courses present difficulties to understand the concept of the same, due to the subjectivity that is generated when it is defined as the slope of the tangent line to a function at a certain point, which makes it difficult for them to see their great utility. This paper presents the formulation of a didactic guide for the teaching of the derivative with the free software "GeoGebra", directed to teachers who teach this subject in institutions of higher education.

PALABRAS CLAVE

*Cálculo diferencial
Derivada
Didáctica
Enseñanza aprendizaje
Geogebra
Pedagogía*

RESUMEN

A pesar de las diferentes aplicaciones que tiene el concepto de derivada en diferentes áreas del conocimiento; ciencias exactas y naturales, economía, ingeniería, administración, entre otras, numerosas experiencias docentes revelan que la mayoría de estudiantes de cursos de cálculo diferencial presentan dificultades para entender el concepto de la misma, debido a la subjetividad que se genera cuando ésta se define como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto determinado, lo que les dificulta ver su gran utilidad. Este trabajo tiene como objetivo presentar la formulación de una guía didáctica para la enseñanza de la derivada con el software libre "GeoGebra", dirigida a docentes que imparten ésta asignatura en Instituciones de Educación Superior.

Recibido: 10/02/2016

Aceptado: 26/06/2016

Introducción

EN carreras de ingeniería, el estudio del cálculo diferencial e integral comienza con el concepto de derivada. Para comprender las definiciones y teoremas que involucran dichos contenidos, los estudiantes deben asimilar el concepto de razón de cambio y manejar representaciones y conceptos geométricos como la pendiente de la recta tangente en un punto.

Este trabajo tiene como objetivo presentar una guía didáctica para la enseñanza de la derivada con el software libre “Geogebra”. La guía se presenta a través de un objeto de aprendizaje, en el cual se detalla paso a paso el protocolo de uso, presenta aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento y propone ejercicios prácticos para que sean desarrollados por los estudiantes. La guía puede ser utilizada de manera gratuita desde un ordenador de escritorio o dispositivo móvil que cuente con sistema operativo Android o iOS con acceso a internet.

La guía consiste principalmente en el desarrollo de un ejercicio práctico, en el cual los estudiantes construyen la gráfica de la derivada de una función a partir del concepto de recta tangente a una curva y la pendiente. Posteriormente, la guía presenta la teoría básica sobre derivadas de funciones, fórmulas y casos de aplicación, tomando como referencia las principales temáticas dictadas en la unidad de derivadas y razones de cambio en cursos de cálculo diferencial. Se concluye que, gracias a las TIC, los estudiantes pueden entender con mayor facilidad conceptos y teorías abstractas, y verle la aplicabilidad en la vida real, lo que incrementa el interés y motivación en el proceso de aprendizaje.

La Derivada

Puede definirse como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero (Stewart, 2006). Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada (Stewart, 2006). La derivada de una función f en el punto x , se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

Si el resultado del límite es un número real la función es derivable, de lo contrario, si el límite no existe o no es un número real la función no es derivable (Stewart, 2006). La idea central del cálculo diferencial es la noción de derivada al igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de geometría; el problema de hallar la recta tangente en un punto a una curva (Apostol, 1967). La definición de la derivada fue solucionada

por Isaac Newton y Gottfried Leibniz; estos dos matemáticos solucionaron el problema de la tangente a una curva y el de los máximos y mínimos de una función, dando origen al llamado cálculo diferencial.

Principalmente, las derivadas son utilizadas para relacionar dos magnitudes. Esta tiene muchas aplicaciones en la vida real y ayuda a solucionar problemas en diferentes áreas del conocimiento (Leithold y Fagoaga, 1998). Para el uso de esta guía, se recomienda que los estudiantes dominen el concepto de función, dominio, rango, máximos, mínimos y hayan tenido un acercamiento previo a los conceptos de derivada, razones de cambio y límite de funciones.

La guía tiene como objetivo facilitar el concepto de derivada con el software “Geogebra”. Con este software, los estudiantes pueden analizar y comprender de una manera más fácil el movimiento de funciones y los gráficos que generan estos movimientos. La Tabla 1, resume algunos de los principales usos de la derivada en diferentes áreas del conocimiento:

Tabla 1. Aplicaciones de la derivada

Área de conocimiento	Aplicaciones
Agronomía, veterinaria y afines	Calcular la cantidad mínima de cerca necesaria para cercar un terreno Representar la tasa de crecimiento de un tumor con respecto al tiempo.
Ciencias exactas y naturales	Calcular la velocidad y la aceleración de un automóvil a partir de la posición. Calcular la fuerza a partir de la derivada del momento lineal y calcular la energía (potencial, cinética, trabajo, etc.) a partir de la derivada de la fuerza con respecto a la posición.
Ciencias de la salud	Calcular la velocidad de reproducción de enfermedades. Determinar los máximos y mínimos instantes de virulencia de una bacteria. Obtener un cálculo aproximado de la velocidad de reproducción de un virus, bacterias, etc.
Ciencias sociales y humanas	Determinar variaciones demográficas (incrementos y disminuciones). Determinar tasas de natalidad y mortalidad.
Economía, Administración, Contaduría y afines	Optimizar recursos. Conocer los puntos máximos de ganancia y los costos mínimos a partir de las funciones de ganancia y de costo de una empresa.
Ingeniería, Arquitectura, Urbanismo y afines	Optimizar el tiempo, el espacio y los recursos tangibles. Conocer la cantidad de combustible que necesita un cohete para despegar y la cantidad que consume en el tiempo. Calcular la velocidad de una reacción química.
Matemáticas	Calcular el área a partir de la derivada del volumen y calcular la distancia a partir de la derivada de la superficie, entre otras.

Fuente: elaboración del autor.

Geogebra

Ambiente matemático que permite trabajar con gráficos dinámicos en 2D y 3D, geometría, álgebra, hojas de cálculo, probabilidad, números complejos, ecuaciones diferenciales, texto dinámico, colocación de funciones de cualquier tipo de datos, etc. (Hall y Lingefjärd, 2017). La interfaz de “GeoGebra” ofrece dos tipos de interpretación: geométrica y algebraica (Bhagat, 2017). En comparación con otros softwares de matemáticas como; Mathematica, Maple etc., “Geogebra” es más fácil de usar (Kushwaha, 2014). Puede ser empleado en todos los niveles educativos: básica secundaria, media vocacional y superior (Cukierman et al., 2014). Este software ofrece grandes oportunidades para la aplicación práctica en la enseñanza de las matemáticas (Sekulić y Takači, 2013). Es dinámico,

libre, de código fuente abierto y permite crear objetos matemáticos e interactuar con ellos. Fue creado por Markus Hohenwarter y está disponible para su uso desde el año 2002 (Zengin, Furkan y Kutluca, 2012).

Los usuarios son principalmente profesores y estudiantes que lo utilizan para explicar, explorar y modelar los conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos (Zengin et al., 2012). Permite crear diferentes aplicaciones interactivas que se pueden usar como herramientas de enseñanza para ilustrar las clases de matemáticas (Caligaris, Schivo, y Romiti, 2015). También, permite a los usuarios crear actividades incorporando múltiples representaciones de los conceptos matemáticos que están vinculados de manera dinámica. La Tabla 2, presenta algunos programas similares a “Geogebra” y sus principales características:

Tabla 2. Programas similares

Programa	Descripción	Año de creación	Desarrollador	Tipo de Licencia
Gnuplot	Software gratuito de trazado. Permite generar gráficas de funciones y datos. Es compatible con diferentes sistemas operativos.	1986	Grupo independiente	Código Abierto
Padowan Graph	Permite elaborar gráficas de diversas funciones matemáticas en un sistema de coordenadas, de forma sencilla y precisa. Permite trabajar con gráficas normales y parametrizadas.	1992	Padowan	Gratuita GNU GPL
R Cran	Entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico, permite cargar diferentes bibliotecas o paquetes con funcionalidades de cálculo y graficación.	1993	Ross Ihaka y Robert Gentleman	Gratuita GNU GPL
SPSS	Programa estadístico informático muy usado en las ciencias sociales y aplicadas, además de las empresas de investigación de mercados.	1968	IBM	Paga Cerrada
PSPP	Aplicación de software libre para el análisis de datos. Se presenta en modo gráfico y está escrita en el lenguaje de programación C.	2001	Proyecto GNU	Gratuita GNU GPL
Microsoft Mathematics	Software educativo, diseñado para Microsoft Windows, que permite a los usuarios resolver problemas matemáticos y científico.	2011	Microsoft	Gratuita
Desmos	Calculadora gráfica implementada como una aplicación de navegador y una aplicación móvil. Permite representar gráficamente tanto ecuaciones e inecuaciones.	2011	Eli Luberoff	Gratuita
Matplotlib	Biblioteca para la generación de gráficos a partir de datos contenidos en listas o arrays en el lenguaje de programación Python y su extensión matemática NumPy.	2001	John D. Hunter	Gratuita
Python(x,y)	Software gratuito de desarrollo científico e ingeniería para cálculos numéricos, análisis de datos y visualización de datos.	2008	Pierre Raybaut	Gratuita

Fuente(s): elaboración del autor.

Metodología

Para la enseñanza del concepto de derivada se propone la siguiente metodología, una vez se haya socializado con los estudiantes las instrucciones de uso del programa. Se recomienda que los estudiantes desarrollen la guía de manera individual sin ayuda docente en ordenadores que tengan instalada la versión de escritorio del programa “Geogebra” o bien la versión en línea. El

estudiante desarrollará la siguiente guía con el fin de aclarar el concepto de derivada. El objetivo principal es que los estudiantes hallen la derivada de forma gráfica de cualquier función matemática:

- Abrir el software “Geogebra”. Si el ordenador no tiene la versión de escritorio instalada se puede acceder a la versión online desde el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/graphing> . Dar clic en la opción “comienza a graficar”.

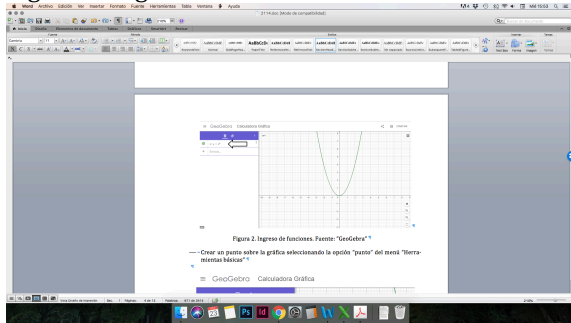
Figura 1. Pantalla inicio “GeoGebra”.



Fuente: “GeoGebra”.

- Escribir la ecuación de la función que se desea derivar en la parte lateral izquierda. En este caso la función a derivar es la función cuadrática $y = x^2$.

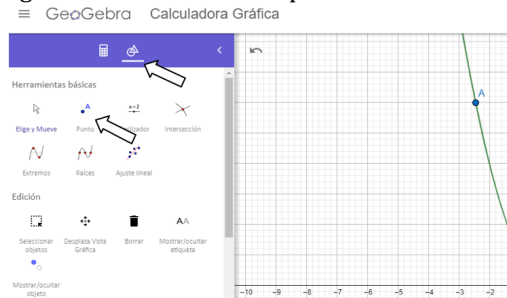
Figura 2. Ingreso de funciones.



Fuente: “GeoGebra”.

- Crear un punto sobre la gráfica seleccionando la opción “punto” del menú “Herramientas básicas”

Figura 3. Herramienta de punto.



Fuente: “GeoGebra”.

- Crear una recta tangente que pase por el punto y la función. Para hacerlo se selecciona la opción “Tangentes” del menú “Construcción”, luego se selecciona el punto y la función $y = x^2$. El resultado debe ser el siguiente.

Figura 4. Tangentes.



Fuente: “GeoGebra”.

- Crear la pendiente de la recta tangente y el punto seleccionando la opción “pendiente” del menú “Medición”. Una vez realizado, tanto el punto como la pendiente deben deslizarse por la gráfica cuando se mueve el punto A.

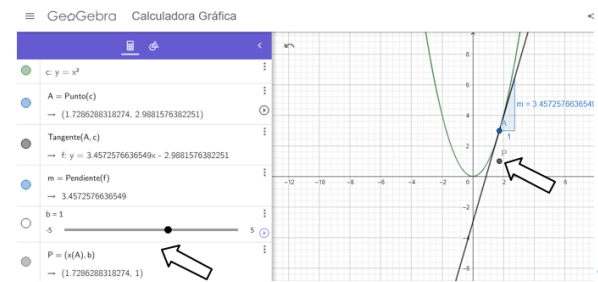
Figura 5. Pendientes.



Fuente: “GeoGebra”.

- Posteriormente, creamos un punto adicional $P = (x(A), b)$, escribiendo directamente el comando en la función de entrada. El punto P, al tener el mismo componente de la abscisa del punto A, se va a mover cuando este lo haga.

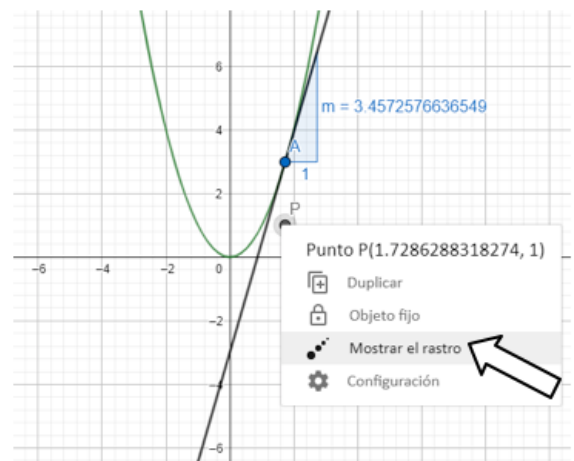
Figura 6. Auxiliares. Fuente: “GeoGebra”



Fuente: “GeoGebra”.

- Presionar clic derecho sobre el punto P y activar la opción “Mostrar el rastro”.

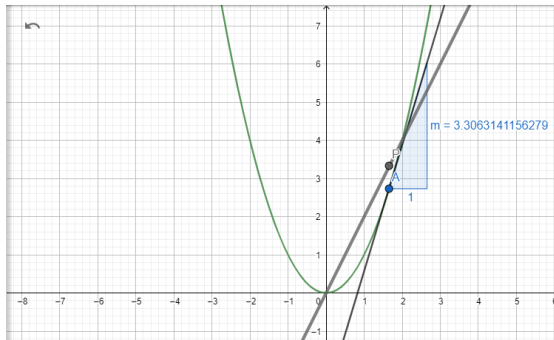
Figura 7. Activación de rastro. Fuente: “GeoGebra”



Fuente: “GeoGebra”.

- El rastro gris que se genera al desplazar el punto A, corresponde a la derivada de la función.

Figura 8. Derivada.



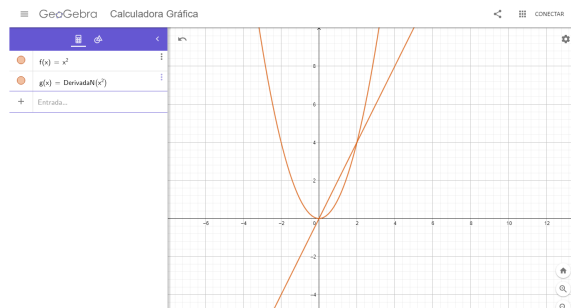
Fuente: "GeoGebra".

Para comprobar el resultado, el estudiante puede derivar directamente empleando cualquiera de las dos siguientes opciones:

- *Derivada[Función]: Da por resultado la derivada de la función.*
- *Derivada [Función, Número n]: Da por resultado la derivada de orden n de la función.*

Puede usarse $f'(x)$ en lugar de Derivada[f] así como $f''(x)$ en lugar de Derivada [f, 2]. La Figura 1, presenta el resultado de la primera derivada de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

Figura 9. Función inicial y derivada.



Fuente: "GeoGebra".

Como se mencionó anteriormente, la guía se presenta a través de un objeto de aprendizaje. Se requiere tener una versión de Adobe Flash Player 12.0 o superior, contar con un dispositivo móvil con sistema operativo Android / iOS y un navegador web (Google Chrome /Mozilla Firefox/Internet Explorer/Opera). El objeto de aprendizaje funciona para los sistemas operativos Windows y Linux. Adicionalmente, la guía presenta la teoría básica sobre derivación. Ver Tabla 3:

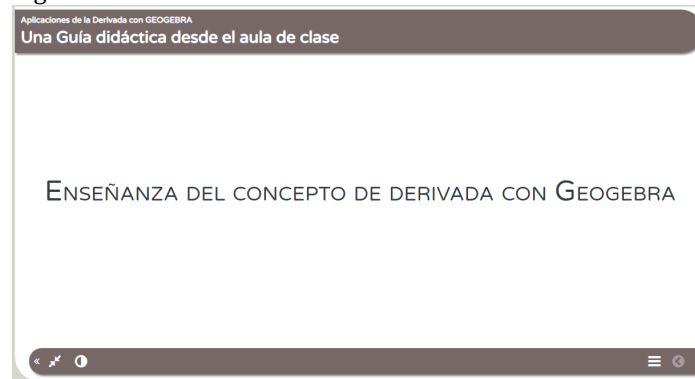
Tabla 3. Contenido

	Temáticas
Unidad 1	Derivadas inmediatas
Unidad 2	Derivadas de sumas, productos y cocientes
Unidad 3	Derivadas exponenciales
Unidad 4	Derivadas logarítmicas
Unidad 5	Derivadas trigonométricas
Unidad 6	Derivada de función compuesta
Unidad 7	Derivada de función inversa
Unidad 8	Derivada sucesiva e implícita
Total	8

Fuente(s): elaboración del autor

La Figura 10 presenta la interfaz inicial del OVA:

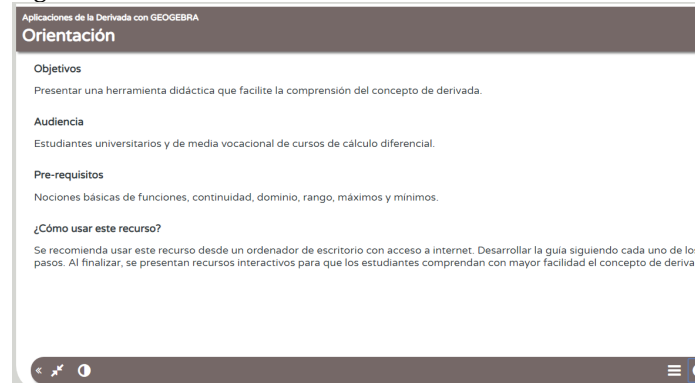
Figura 10. Interfaz Inicial.



Fuente(s): elaboración del autor

La Figura 11 presenta la segunda interfaz del OVA, en la cual se presentan los objetivos, audiencia, pre-requisitos y cómo utilizarlo.

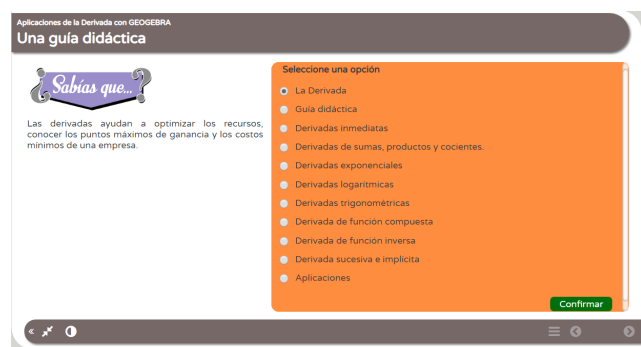
Figura 11. Orientación.



Fuente(s): elaboración del autor.

La Figura 12 presenta las unidades temáticas de la guía:

Figura 12. Unidades.



Fuente(s): elaboración del autor.

La Figura 13 presenta la Actividad 1 perteneciente a la Unidad 4. “Derivadas de sumas, productos y cocientes”:

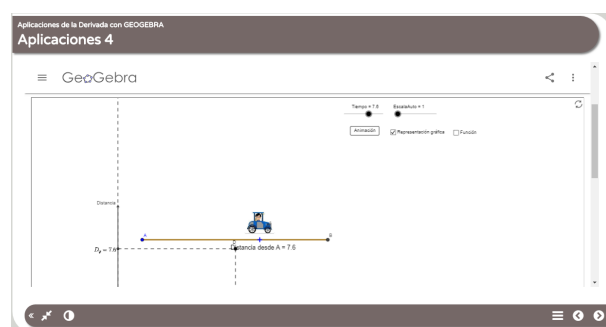
Figura 13. Actividad 1.



Fuente(s): elaboración del autor.

La Figura 14 presenta un caso de aplicación sobre posición, velocidad y aceleración de un automóvil:

Figura 14. Actividad 2.



Fuente(s): elaboración del autor.

Los diferentes tipos de actividades que se presentan en el OVA son: diagramas interactivos, categorías, diálogos, arrastrar y ubicar etiquetas, completar oraciones, imágenes interactivas, apareamiento textual, quiz y líneas de tiempo. Una vez finalizadas las actividades de cada una de las unidades, el estudiante debe presentar un Quiz, el

cual se evalúa en una escala de 0 a 100 las temáticas presentadas en la guía. La Tabla 4 presenta la escala de valoración:

Tabla 4. Calificación

Rango	Concepto
[0 - 20)	Deficiente
[20 - 40)	Insuficiente
[40 - 60)	Aceptable
[60 - 80)	Sobresaliente
[80 - 100)	Excelente

Fuente(s): Elaboración del autor.

Discusión y Validación

Para la validación de la guía se realizó un test a 30 estudiantes del curso de cálculo diferencial en el “Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid” en la ciudad de Medellín, Colombia acerca de derivadas y continuidad. Se emplearon dos grupos, cada uno con 15 estudiantes. Los estudiantes del grupo 1 utilizaron la guía didáctica antes de la presentación de la prueba, los estudiantes del grupo 2 recibieron clases magistrales.

La prueba contenía diez puntos para que fueran desarrollados en 150 minutos. Las calificaciones obtenidas fueron valoradas en una escala de 0.0 a 5.0. El promedio de calificaciones obtenidas por $S_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.7$ los estudiantes de grupo 1 fue superior al promedio de calificaciones obtenidas por el grupo 2 ($X_1 = 4.1 > X_2 = 3.7$). Las calificaciones de los estudiantes del grupo 1 tuvieron menor dispersión ($S_1 = 0.39 < S_2 = 0.59$).

Por último, se realizó una encuesta de satisfacción a los estudiantes que emplearon la guía y al docente que aplicó la prueba. En ambos los resultados fueron satisfactorios. En resumen, los estudiantes manifestaron que la guía les ayudó a comprender con mayor facilidad la temática evaluada. Por su parte, el docente de la asignatura manifestó una mejoría en la concentración, motivación y en el desempeño de los estudiantes.

Conclusiones

Desde el punto de vista teórico, la mayoría de definiciones y conceptos matemáticos poseen un alto nivel de abstracción, lo que genera en los estudiantes miedo, disgusto y rechazo por el aprendizaje de los mismos. Este trabajo permitió concluir que gracias al uso de “Geogebra”, el nivel de abstracción del concepto de derivada se disminuyó notoriamente, ya que se permitió a los estudiantes que ellos mismos fueran los que construyeran el concepto con un ejercicio práctico y lo entendieran a su manera.

Enseñanza del concepto de derivada con Geogebra

Los docentes de ciencias básicas y naturales de américa latina deben incrementar aún más el uso de las TIC en el proceso de enseñanza. Las clases magistrales presenciales en las cuáles el estudiante únicamente se limita a leer, escribir y escuchar,

hace más difícil y lento la asimilación de conceptos y teorías. Si se les da la oportunidad a los estudiantes de aprender haciendo, estos pueden lograr mejores resultados en su desempeño académico.

Referencias

- Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Waltham, MA: Blaisdell.
- Bhagat, K. K. (2017). Integrating GeoGebra with TPACK in improving Pre-service Mathematics Teachers' Professional Development. *2017 IEEE 17th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)*, 313–314. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2017.9>
- Caligaris, M. G., Schivo, M. E., y Romiti, M. R. (2015). Calculus y GeoGebra, an Interesting Partnership. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 174, 1183–1188. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.735>
- Cukierman, U., Arnal, P., Cerasulo, P., Esperon, G., Fuertes, B., Agüero, M., ... Badaro, S. (2014). Playing with Maths GeoGebra Application for Meaningful Education, (Diciembre), 243–248. <https://doi.org/10.1109/ICL.2014.7017777>
- Hall, J., y Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical Modeling. Applications with GeoGebra*. (I. John Wiley y Sons, Ed.) (Primera Ed). Hoboken, New Jersey: John Wiley y Sons, Inc.
- Kushwaha, R. C. (2014). Impact on Students ' Achievement in Teaching Mathematics using Geogebra. *2014 IEEE Sixth International Conference on Technology for Education*, 134–137. <https://doi.org/10.1109/T4E.2014.54>
- Leithold, L., y Fagoaga, J. C. V. (1998). *El cálculo* (Vol. 7). Oxford University Press Harla.
- Sekulić, T., y Takači, Đ. (2013). Mathematical Modelling , Computers and GeoGebra in University and College Mathematics Education. En *MIPRO 2013* (pp. 625–630).
- Stewart, J. (2006). *Cálculo, Conceptos y contextos*. (M. Thomas Editores, Ed.), *Book* (Vol. 3). México, DF.
- Zengin, Y., Furkan, H., y Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31(2011), 183–187. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038>

ANEXO 1

Se realizó una encuesta de satisfacción a los 15 estudiantes que utilizaron la guía didáctica y al docente de la asignatura. Los resultados se presentan a continuación:

1. ¿La guía didáctica contenía suficiente información acerca de la temática? 2. ¿La interfaz gráfica de la guía era apropiada?

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	65 %
Verdadero	25%
Totalmente falso	7%
Falso	3%
Indecisión	0%
Total	100 %

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	60 %
Verdadero	15%
Totalmente falso	8%
Falso	12%
Indecisión	5%
Total	100 %

3. ¿Los videos y animaciones de la guía eran apropiados? 4. ¿Los gráficos empleados en la guía eran apropiados?

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	57%
Verdadero	15%
Totalmente falso	8%
Falso	7%
Indecisión	13%
Total	100 %

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	55 %
Verdadero	25%
Totalmente falso	10%
Falso	10%
Indecisión	0%
Total	100 %

5. ¿El contenido teórico de la guía era apropiado? 6. ¿Los enlaces de la guía eran apropiados?

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	65 %
Verdadero	15%
Totalmente falso	10%
Falso	10%
Indecisión	0%
Total	100 %

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	60 %
Verdadero	20%
Totalmente falso	10%
Falso	10%
Indecisión	0%
Total	100 %

7. ¿Las actividades propuestas en la guía eran consistentes con el objetivo y el contenido de la asignatura? 8. ¿El desarrollo de las actividades de la guía le permitieron aprender con mayor facilidad?

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	70 %
Verdadero	20%
Totalmente falso	3%
Falso	7%
Indecisión	0%
Total	100 %

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	50 %
Verdadero	25%
Totalmente falso	15%
Falso	10%
Indecisión	0%
Total	100 %

9. ¿Los recursos presentados en la guía le generaron mayor motivación en el proceso? 10. ¿El uso de la guía es fácil y divertido?

de aprendizaje?

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	60 %
Verdadero	20%
Totalmente falso	10%
Falso	10%
Indecisión	0%
Total	100 %

Valoración	Porcentaje
Totalmente verdadero	45 %
Verdadero	20%
Totalmente falso	15%
Falso	15%
Indecisión	5%
Total	100 %