Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología, 5(2), 2018, ISSN 2386-8791

CARACTERÍSTICAS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS CONTEMPORÁNEOS SEGÚN LAS BASES DE LA REPRESENTACIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS GRIEGOS

Characteristics of the Contemporary Mathematical Objects According to the Bases of the Representation of the Greek Mathematical Objects

MAGDALENA PRADILLA RUEDA
Corporación Universitaria Republicana, Colombia

KEY WORDS

Epistemology of Mathematics
Mathematical objects
Effective procedures
Decidability
Machines logics

ABSTRACT

The representation of mathematical objects, assumes its existence or reality. Located in two periods: a - ancient Greece: Platonic realism, objects are abstract ideas and Aristotelian empiricism, logical entities based on the empirical object; b- developments contemporary 19th century – 20th: the existence is linked to the conceptual and the construction of accurate and effective methods such as logical machines, extending mathematics and its applications relating to biological phenomena (ability to calculate). The implication of the existence of mathematical objects of the first period is shown in the second, differences and degree of evolution.

PALABRAS CLAVE

Epistemología de las Matemáticas
Objetos Matemáticos
Procedimientos efectivos
Decidibilidad
Máquinas Lógicas

RESUMEN

La representación de objetos matemáticos, *supone su existencia o realidad. Situados en dos períodos: a- la antigüedad griega:* realismo platónico, *los objetos son* abstractos, ideas *y en* empirismo aristotélico, *son entidades* lógicas *basadas en el objeto empírico; b- desarrollos contemporáneos siglo XIX – XX: la existencia está ligada a lo conceptual y a la construcción de métodos precisos y efectivos, como* las máquinas lógicas, *ampliando las matemáticas y sus aplicaciones referidas a fenómenos biológicos (capacidad de calcular). Se muestra la implicación de la existencia de objetos matemáticos del primer período en el segundo, diferencias y grado de evolución.*

GLOBAL KNOWLEDGE ACADEMICS

1. Introducción

El concepto filosófico de *Representación* es muy antiguo y ha estado en el centro de la filosofía occidental. La palabra *Representación,* a nivel general, viene del latín *representare*: reproducir, en griego *εἰκώ:* parecer, *εἰκών*: imagen y tiene varias connotaciones según el dominio de la ciencia a la cual nos referimos (Nouveau Petit Larousse 886), así por ejemplo, en:

Filosofía:

- Acción de hacer sensible o presente al espíritu una cosa, un fenómeno, una idea por medio de un sustituto o un artificio, como una figura, un símbolo o un signo. El conocimiento producido en la mente se realiza por medio de los sentidos o la memoria, de manera que, la escritura es la representación de la lengua hablada por medio de signos gráficos, un histograma la representación sobre la evolución de precios.

Arte:

- Acción de presentar las sensaciones o pensamientos de un artista o de presentar un espectáculo delante de un público: por ejemplo, una obra de teatro, una escultura.

Derecho:

- Acción de representar a alguien o a una colectividad: por ejemplo, la representación de minorías.

Matemáticas:

- Acción de representar un pensamiento u objeto abstracto de una forma material: por ejemplo, las figuras geométricas o los sistemas de ecuaciones diferenciales.

En cualquiera de estas connotaciones la *existencia del objeto* representado es inseparable del objeto y "hace uno solo con la representación dada" (Bergson, 1907, p. 285). Igualmente, la representación que nos hacemos del mundo, al designar una idea, un pensamiento, una sensación, expresa también el hecho de comunicarlos, o de colocarlos delante de los ojos del otro. Para lo cual, como se ha visto, se cuenta con varias *formas de representación*, como diferentes modos semánticos para el arte, la matemática, la imagen y el grafismo que visualizan su existencia en hechos o realidades, y en este contexto, una representación puede ser una cosa que representa otra. Por ejemplo, un plano es una representación gráfica de una parte del mundo en geografía. Una curva puede visualizar medidas físicas relacionadas, en un plano cartesiano, por ejemplo, (curva de temperatura, de pluviometría, …) o puede representar cosas muy abstractas, en dominios como las matemáticas, una función matemática visualizada primero por un medio estadístico, o representar un conjunto de resultados de la función bajo una forma de puntos relacionados, para descubrir una tendencia general.

Situados en el núcleo de la representación de *objetos matemáticos* (Caveing, 2004, p. 75), entendidos éstos como los *elementos* que usa un matemático tanto en su labor teórica como en sus aplicaciones. El objeto se puede caracterizar como una unidad sintética de un sistema de relaciones, más primitivas que él y se puede verificar según nociones de base, como en matemáticas, los conjuntos, números, espacios, …etc.

Igualmente, la representación misma en el objeto, tiene como soporte una *existencia o realidad* que la sustenta; los matemáticos hablan de *la existencia o no-existencia* de los objetos matemáticos, referidos, por ejemplo en el tercer postulado de Euclides: "Que sea ordenado, escribir un círculo de centro cualquiera y de distancia cualquiera (un radio)", el cual establece, por un lado la *existencia* de la figura circular cuya definición indicaba la propiedad de *tener todos los puntos de su periferia iguales según la distancia del centro* y por otro lado presenta su constructividad, en donde, trazando de un punto dado una circunferencia, se obtienen todas las direcciones que se quieran de líneas iguales (constructividad basada en la regla y el compás). De esta manera la existencia del objeto es más clara que en la de su antecesor Aristóteles que afirma: *el geómetra supone el significado del triángulo, pero se puede ver la existencia* (Brunschvicg, 1972, p. 90).

Sabemos igualmente, que la pregunta sobre la existencia o realidad de los objetos, nos conduce a una cierta ontología, según J. Boniface (2004, p.273):

> …no hay existencia matemática absoluta, la existencia es al contrario siempre relativa a un sistema […por ejemplo], el punto de vista de Hilbert permite salir de una concepción ontológica de la existencia matemática, y propone una concepción puramente lógica, que se apoya sobre una base concreta.

De manera que, si ciertos matemáticos pueden admitir la existencia de objetos matemáticos, como parte de una ontología que va a trazar su representación, no todos se preguntan sobre la naturaleza misma de esta existencia[1], sin embargo se encuentran dos períodos precisos, en donde este tema se hace relevante para los matemáticos, lógicos y filósofos, en general y en donde se ve una evolución en la concepción de estos objetos y por lo tanto de su representación y existencia.

[1] J. Boniface (2004, p. 8) nos llama la atención sobre el parecer de *Dieudonné* del Grupo Bourbaki (1977, 145) que dice: "En cuanto a los fundamentos nosotros creemos en la realidad de las matemáticas, pero evidentemente cuando los filósofos nos atacan con sus paradojas, corremos a escondernos detrás del formalismo y decimos: "la matemática no es sino una combinación de símbolos privados de significado", y luego producimos los capítulos 1 y 2 de los *Elementos de la teoría de Conjuntos.* Finalmente nos dejan en paz para volver a nuestras matemáticas, y hacer como nosotros lo hemos hecho siempre, trabajar con alguna cosa de real"

Se puede, entonces, localizar el primer periodo de evolución, en la antigüedad griega, que instaura la ciencia racional y se ve una ruptura con las matemáticas babilónicas y las egipcias y un segundo período, al final del siglo XIX, lo que nos lleva a preguntarnos sobre la implicación de la forma de representación de los objetos matemáticos del primer período en el segundo período, sus diferencias, el grado de evolución, las características resultantes en el período contemporáneo y las implicaciones de éstos, dentro de las matemáticas y sus aplicaciones actuales.

2. Representación y existencia de los objetos matemáticos

Podemos decir que dentro de la dinámica de las matemáticas se encuentra una *puesta en forma* (Boniface 2003, p. 3) del objeto mismo, la cual comprende ciertas nociones como la *representación, la simbolización y la formalización.* Así, como resultado nos encontramos con formas diversas de objetos, como las geométricas, diseños, figuras, representaciones gráficas, estructuras, modelos, lenguajes,… Estos objetos, como hemos planteado, son entonces la representación de una cierta realidad o existencia, que depende entonces del sistema matemático en el que nos situemos, de manera que, en este caso, vamos a retomar dos períodos de evolución de las matemáticas (Desanti, 1968, pp. 10-11): las matemáticas griegas y las matemáticas contemporáneas o modernas que ilustran y contextualizan la realidad perteneciente a los objetos, en estos períodos.

2.1. Representación de los objetos en las matemáticas griegas

La primera gran evolución de los objetos matemáticos se remonta a la matemática griega, como una forma de *pensamiento abstracto* que es la fuente de la ciencia occidental, para presentar las explicaciones del mundo sensible, en un nivel abstracto. Se ve entonces un paso progresivo del *mito a la ciencia* que llega a ser para los griegos un *bien público*. Uno de los objetos de discusión, por ejemplo, eran las *proposiciones matemáticas*, que no son simples enunciados que traducen los hechos empíricos, sino enunciados que necesitan una demostración que conduce, de una proposición (premisa) a una conclusión. Así, el desarrollo de las matemáticas griegas en general sigue un ascenso hacia la razón y su realidad gira hacia la abstracción; hay una gran evolución de los objetos, con respecto a las matemáticas babilónicas y egipcias, cuya realidad estaba basada en entidades singulares y concretas, era totalmente empírica, como la necesidad, después de cada inundación del Nilo, de redistribuir equitativamente los campos a sus propietarios o la búsqueda de reglas eficaces sobre los planos correspondientes a su aplicación, sin que estas reglas sean estudiadas en sí mismas.

A esta matemática, de realidad *empírica* le sucede una matemática *racional* donde a las entidades singulares y concretas se le substituyen entidades *abstractas*, ideales; no se trata de considerar un terreno rectangular, sino de estudiar las propiedades del rectángulo y es esta estructura abstracta del rectángulo que es la esencia misma de la realidad, causa entonces de las realidades empíricas (terreno rectangular). Así, para los *Pitagóricos* (Dahan – Dalmedico y Peifer, 1986, pp. 46-49), por ejemplo, los números que se identifican a conjuntos de puntos dispuestos en configuraciones geométricas, son la representación de piedras (*calculi)* colocadas en la arena o la forma geométrica representación de la manera como las estrellas se disponen en una constelación, los conduce a la búsqueda de *esencias* o a la estructura misma de las realidades empíricas. A su vez, ellos definen las propiedades de los números o de las configuraciones o de las formas que estos representaban.

Esta evolución en los objetos matemáticos, trae grandes discusiones sobre la naturaleza misma de estos objetos, de manera que, los *objetos abstractos* pueden ser o bien entidades perfectas y puramente inteligibles, que son las *ideas* dotadas de una representación (la esencia del rectángulo) y de una realidad fuera de cualquier objeto empírico, lo que conforma el *realismo platónico;* o bien pueden ser entidades *lógicas*, en donde las esencias no tienen realidad por si solas, sino que toman su existencia a partir del objeto empírico (el rectángulo mismo del terreno) y es lo que conforma el *empirismo aristotélico.*

2.1.1. Realismo Platónico

Platón con el fin de afianzar el pensamiento abstracto, plantea la *Teoría de dos Mundos*: el mundo sensible, en el que vivimos y el mundo inteligible de las ideas, esencias inmateriales, eternas, como arquetipos de la realidad y base de los objetos del mundo real. En la *Analogía de la Línea (La República, Libro VI- 509ª-511e)*, Platón determina una línea que *representa* el mundo y se divide en dos mundos y cada uno de estos se divide a su vez, en dos partes, que llevan al *bien*, como principio y fin de todos los seres humanos y de todas las ideas, así:

- El *mundo sensible* que contiene lo que se experimenta indirectamente, como las sombras o reflejos en los espejos de los objetos reales; y lo que se experimenta directamente, como son los objetos reales.
- El *mundo inteligible* o de aquello que es aprehendido por el espíritu, separado en: el campo de la ciencia, como los objetos matemáticos, que al ir más allá de su

soporte material (figuras geométricas, por ejemplo, o números) llevan al conocimiento intelectual como los teoremas intelectuales; y el reino de las ideas que es aprehendido por la *razón pura*.

De manera que, si los objetos sensibles están sometidos al cambio no pueden ser aprehendidos sino subjetivamente, al contrario, sus modelos son universales, inmutables y permanentes. En el *mundo de las ideas*, éstas son eternas, anteriores a toda experiencia y aprehendidas intuitivamente como objetos que se pueden contemplar mentalmente, es entonces, en este espacio donde Platón señala el conocimiento verdadero y atemporal, contrario a lo temporal y fugaz. De manera que, el círculo trazado en la arena no es sino una realización imperfecta del círculo abstracto que vislumbra el círculo ideal, y es éste el objeto del conocimiento matemático. Por ejemplo, el filósofo–matemático, será capaz por sí mismo, de enumerar cinco cosas, si tuviera en él primero la idea de número y la esencia del número 5, como ideas atemporales y verdaderas. Lo cual nos lleva a decir que las ideas preceden a un conocimiento sensible, en el mundo de Platón.

Es así que, para basar el Mundo de las Ideas en un conocimiento racional, inteligible y de principios no- hipotéticos (reales), Platón presenta el campo de los objetos abstractos, como conocimiento racional discursivo, cuyo soporte son los *objetos matemáticos*, representados materialmente en símbolos, figuras, signos, etc. y que al ir más allá de ellos, por medio de la reflexión y contemplación intelectual, nos conducen a las *Ideas.* Los objetos matemáticos se convierten, entonces, en un paso obligatorio para acceder al *sistema platónico* e igualmente este planteamiento tiene una consecuencia sobre la estructuración misma de las matemáticas, por ejemplo, en el ejercicio de la *demostración*, el recurso a la experiencia está prohibido. Así, de esta manera solamente es posible el uso exclusivo el razonamiento deductivo, lo que transforma radicalmente las matemáticas. El objetivo está en la búsqueda de la verdad eterna e inmutable, contrario a los razonamientos por analogías o por inducción que no ofrecen certeza segura a nivel de las conclusiones; la deducción, al contrario, conduce a resultados absolutamente ciertos, si las premisas son correctas.

Anotaciones:

El idealismo platónico (o realismo de las ideas, porque las ideas son la realidad fundamental) puede recibir dos interpretaciones, en el caso de las matemáticas: una interpretación ontológica, según la cual las realidades fundamentales son las ideas en donde el mundo sensible no es sino una copia; y una interpretación en términos epistemológicos que hace de la construcción de los objetos matemáticos el punto de partida de cualquier conocimiento posible en matemáticas.

Así mismo, a partir de los lineamientos establecidos en la Academia de Platón practicados por Euclides (s. IV a. C.), aparecen los *Elementos de Geometría*, con lo que se enriquece el patrimonio de las verdades matemáticas conocidas, comenzando por presentar el orden jerárquico de un sistema matemático. Los objetos o elementos geométricos se construyen con la regla y el compás, pero se imponen como los objetos de una ciencia abstracta y deductiva, caracterizada de perfección y rigor en su construcción y demostraciones, cercanos a la concepción de los objetos concebidos por Platón.

2.1.2. Empirismo aristotélico:

Al contrario del planteamiento de Platón, si la representación de los objetos no se hace a partir de la existencia de las *Ideas*, sino a partir de los objetos del mundo sensible, la representación de los objetos matemáticos es de otro tipo, se encuentra en la existencia de realidades singulares[2]. Aristóteles en *Categorías* (*5 La Substancia 15-35*), la substancia es, en el sentido más fundamental, lo que no se afirma de un sujeto ni en el sujeto: por ejemplo lo que tiene de particular el hombre individual o el pájaro individual, lo que quiere decir que es la existencia de las realidades individuales el fundamento de toda realidad, en donde a falta de la existencia de sustancias primarias, ninguna otra cosa podría existir. En la *Metafísica*, Aristóteles rechaza la noción en la que los *universales* pueden ser considerados como substancias, porque lo universal es lo que pertenece naturalmente a una multiplicidad y entonces nada de lo que existe como universal en los seres es una substancia, con lo cual no hay substancia compuesta de substancias, es decir que no tienen una existencia dentro del mundo sensible. Es precisamente este rechazo a los *universales* que estructura el anti-platonismo y su rechazo a la teoría de las ideas y al contrario define los objetos matemáticos, abstractos, como existentes a partir de representaciones de objetos sensibles. De manera que, si un cuadrado es estudiado por el geómetra fuera de una realidad física cuadrada, no existe el cuadrado como tal.

Anotaciones

Los herederos de la matemática griega y euclidiana trabajaron en aras de completar, ampliar, analizar y rechazar ciertos planteamientos, hasta la llegada de la geometría cartesiana o analítica. Geometría que no buscaba resolver directamente las dificultades de esta herencia, pero que lleva a la matemática a un verdadero cambio de objetos, y que habría que esperar al menos dos siglos para sacar las

[2] Parecidos a los planteamientos posteriores de los *nominalistas*

principales consecuencias (Gardies, 2004, pp. 6-13). Razón por la cual no retomamos la evolución de sus objetos correspondientes y nos remitimos directamente a los objetos de la matemática contemporánea.

2.2. Representación de Objetos en las Matemáticas Contemporáneas:

El problema de la representación y existencia de los objetos abstractos matemáticos (Boniface 2004, pp. 14, 263-264), surge luego en el siglo XIX, referido a la *Crisis de los Fundamentos de Matemáticas,* y se problematiza, en el corazón mismo de las matemáticas, en diferentes dominios: en el análisis, la evidencia geométrica no es suficiente para probar la existencia de números irracionales; en algebra se ve la necesidad de reemplazar los números ideales por entidades que tengan una existencia "verdadera". Sobre esta existencia "verdadera", se oponen dos corrientes : la primera la de una matemática "real", ligada a la intuición, cuya existencia es tomada como *cálculo real*, en donde la fórmula algebraica reemplaza entonces la figura geométrica como testigo de éste cálculo y la segunda corriente la de una *matemática conceptual*, en donde la *consistencia* es suficiente para justificar la existencia. De esta manera, la discusión tomó una fuerza particularmente en el momento de la aparición de la *teoría de conjuntos*, en donde la pregunta se hace sobre la existencia o no de los conjuntos ellos mismos y particularmente de los conjuntos infinitos.

Estas discusiones sobre la existencia o no de los objetos, retoman los dos aspectos ligados a las corrientes griegas, así:

- Los seguidores de una matemática *real*, *platónica,* ligada a la intuición y a las matemáticas conceptuales, ideales, donde se concede una existencia a las clases de objetos. Esta corriente toma la vía de la transcendencia y la teórica. Los objetos simples, se pueden considerar como *existentes*, en tanto que ellos están a disposición para el uso de los matemáticos.
- Los que consideran una matemática con una *existencia,* empleada en el sentido de una *efectividad* o construcción de métodos claros y precisos en la resolución de problemas y en la presentación de los objetos abstractos matemáticos y niegan la existencia de las clases de objetos. Esta corriente toma la vía de la inmanencia, la práctica y la construcción de objetos.

En este último caso, se pueden tener varias líneas, dependiendo del tipo de la existencia y concepción de la representación del objeto matemático:

- *Nominalista*[3], donde las clases de objetos no son sino "formas de hablar" y por lo tanto no son objetos en sí mismos, son nombres o etiquetas convencionales, útiles para clasificar nuestras percepciones de la existencia de los objetos sensibles.
- *Empirista,* en el que el objeto matemático debe existir y representar una evidencia sensible. Aquí se quiere obtener objetos análogos a los de la ciencia de la naturaleza, se estudian los objetos matemáticos como se estudian los órganos en anatomía.
- *Intuicionista*[4]*,* en donde el objeto abstracto es una representación de la intuición sensible o conceptual.
- *Constructivista,* en el cual el objeto matemático es el resultado de una construcción, en el que muchas veces parte de elementos primitivos existentes, y que luego de un proceso de construcción, se produce el objeto en su totalidad. Las tres líneas anteriores, requieren de un proceso de construcción para la producción de sus objetos.

3. Representación de los objetos matemáticos contemporáneos relacionados con la efectividad

Uno de los temas innovadores, que llama nuestra atención, con respecto a la *Representación* en el desarrollo de ciertos objetos matemáticos contemporáneos, se encuentra ligado a la producción de procedimientos efectivos que, en algunas ocasiones se conocen como *máquinas lógicas,* desarrollados por los lógicos de los años 30, del siglo pasado. Estos objetos son de tipo *empirista*, ya que se van a referir a fenómenos biológicos del ser humano, como la capacidad de calcular, funcionamiento de redes neuronales, capacidad del lenguaje, etc.

En este sentido, las *máquinas lógicas* son *objetos abstractos* o máquinas abstractas que no tienen todavía elementos físicos o materiales pero son la representación de un objeto o cuerpo sensible, como el cerebro.

---

[3] En esta línea se encuentra Guillaume d'Occam (1280-1348), que es tomado como su fundador, el señala que lo *singular* puede comprenderse de dos maneras: *todo aquello que es uno y no varios* e igualmente *aquello que no está destinado a ser el signo de varias cosas*. Lo que es universal solo existe en la mente. (Kunzmann, Burkard y Wiedmann, 1993, pp. 89).

[4] El *Intuicionismo*, entre los cuales figuran Brower, Weyl, Poincaré y Kronecker, argumentan que la lógica clásica ha dejado de ser confiable y la lógica no tiene la verdad absoluta. Al dejar de lado los conjuntos finitos se han perdido los límites originales, es necesario volver a la *intuición* tanto sensible como conceptual. Una consecuencia es volver a la construcción de las matemáticas (Largeult, 1992, pp. 10-12)

3.1. Contexto lógico y matemático de las Procedimientos efectivos

El espíritu *fundacionalista* de las Matemáticas, a finales del siglo XIX, va a centrar su interés sobre el razonamiento *constructivo*. David Hilbert (matemático alemán: Konisberg, 1862 – Gottingen, 1943), se pregunta sobre las proposiciones que tocan el infinito y la posibilidad de utilizarlas de manera *finita.* Para ello, al retomar los *Elementos de la Geometría* de Euclides, se propone:

- precisar el estatuto de la Geometría (Hilbert, 1971) y la interpreta por medios algebraicos;
- probar la consistencia absoluta de la matemática, que a partir de la consistencia de los números enteros se deducirían las diferentes ramas de matemáticas;
- asegurar el aspecto formal de las proposiciones lógicas y posibilitar que la deducción se opere de manera efectiva, por medio de un procedimiento finito, operado fuera de ese sistema de deducción por el matemático, como disciplina del pensamiento. En este caso, nuestro pensamiento seria finitista y por lo tanto funcionaría de una manera efectiva y sería igualmente, modelo de los procedimientos efectivos y finitos.

Así, para Hilbert cualquier sistema matemático, debía ser *completo* (cada fórmula debe ser demostrada en el sistema*), consistente* (las fórmulas contradictorias no pueden ser generadas a partir de sus axiomas) y *decidible* (requiere un método efectivo para decidir si una formula puede ser verdadera o falsa) (Hilbert, Bernays, 2002, pp. 55-58).

Las respuestas al planteamiento de Hilbert fueron dados por los lógicos de los años 30 (Gandy, 1998, pp. 55-56) de manera negativa: Gödel (1931, pp. 105-143) responde al primer problema de la *completitud;* en el *primer teorema de incompletitud* prueba que hay un problema restante que está por fuera de un sistema totalmente formalizado (Axiomática, nominada por Hilbert), en donde un teorema (proposición verdadera) podía ser verdad sin ser obligatoriamente deducible de sus axiomas, lo que prueba que el sistema en cuestión no es justamente *completo* en un sentido *sintáctico*, pero que lo es en un sentido *semántico.* El *segundo teorema de incompletitud* establece que se puede tomar, a título del enunciado: "verdadero pero no probable"; mencionado en el primer teorema, el enunciado mismo de la *consistencia* , que al no contar con la completitud de pruebas elementales, entonces la consistencia no podría demostrarse al interior del sistema. (Blanché y Dubucs, 1996, pp. 370- 375). Gödel (1931, pp. 143) nos dice:

> Se puede demostrar rigurosamente que en todo sistema formal consistente que contiene una teoría finita de números relativamente desarrollada, existen proposiciones aritméticas indecidibles y que además, la consistencia de un tal sistema no sabría ser demostrada al interior de este sistema.

En cuanto al carácter *decidible,* es decir contar con procedimientos efectivos, formales y finitos en donde se sepa con anterioridad que una proposición del sistema puede ser demostrada o no, los matemáticos Alan Turing, Emil Post, Alonzo Church y Stephen Kleene, entre otros, se sitúan en la perspectiva de la *efectividad del cálculo,* es decir no solamente desde el planteamiento de las posibilidades de resolución, sino de las condiciones prácticas de su producción y presentan igualmente una negativa a la obligatoriedad de la decidibilidad, propuesta por Hilbert.

Además, estos matemáticos contaban con tres lineamientos de Hilbert: por un lado, el de que nuestro pensamiento seria finitista y funcionaría de manera efectiva, lo cual sería la base para la elaboración de estos procedimientos efectivos; por otro lado, un lineamiento epistemológico en el que *todo problema matemático tiene solución*, el cual tiene que tener una forma tal que sea posible resolverlo: no hay *Ignorabimus en Matematica*, de ahí la importancia dada a la búsqueda de procedimientos efectivos de solución de problemas matemáticos (Wagner, 1998, pp. 25); y finalmente la *recategorización* de las herramientas matemáticas como los procedimientos, los métodos de cálculo, … etc. que pasaban a tener el estatuto de *objetos* (Lassègue, 1998, pp. 39-42), lo que daba la posibilidad de ser caracterizados y estudiados claramente.

Así, los objetos matemáticos contemporáneos, de tipo *empírico*, van a tener las características anteriores y van a tomar varias formas de representación, como procedimientos efectivos, referidas a la forma de pensar o bien de cómo se calcula o cómo se realiza un procedimiento, o bien referidas a los procedimientos efectivos señalados por el funcionamiento de una red neuronal o igualmente las formas relativas a los lenguajes formales como representación de lenguajes naturales, utilizados por procedimientos efectivos o máquinas lógicas. Para nuestra argumentación, vamos a presentar tres desarrollos relacionados a los procedimientos efectivos o máquinas lógicas.

3.1.1. Procedimiento sobre cómo se sigue una lista de instrucciones

Emil Post (1936, pp. 103-105), se pregunta sobre: ¿qué hace un obrero que sigue una lista de instrucciones? Lo que nos conduce a un procedimiento general similar a una máquina, en donde Post va a presentarnos tres conceptos: un espacio simbólico donde se ejecuta el trabajo que conduce del problema a la respuesta, un conjunto de instrucciones fijo que, a la vez generará las operaciones dentro del espacio simbólico y determinará el orden en el cual estas instrucciones deben ser aplicadas y un obrero que realiza físicamente las operaciones.

El espacio simbólico consiste en casillas, ordenadas de manera análoga a la cadena de enteros: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …; el obrero que va a resolver el problema o seguir las instrucciones de la lista va a moverse en este espacio simbólico y puede seguir las acciones primitivas siguientes:

- Marcar la casilla en la cual se encuentra (supuestamente vacía)
- Suprimir la marca en la casilla en la cual se encuentra (supuestamente marcada)
- Desplazarse a la casilla de la derecha
- Desplazarse hacia la casilla de la izquierda

Independientemente de la presencia del obrero, una casilla puede estar en dos estados posibles: vacía o sin marca o contener una marca. Una de las casillas debe estar marcada como la del inicio. La respuesta debe ser una configuración de casillas marcadas obtenidas al final del procedimiento o seguimiento de instrucciones y este se termina cuando se llega a la instrucción de tipo *parar.*

El procedimiento debe ser finito, es decir que debe terminar por cada problema específico planteado, pero con este procedimiento no se puede prever que el problema presentado llegue a alguna solución, es decir que el procedimiento es *indecidible.*

3.1.2. Procedimiento sobre cómo se calcula o se piensa

Alan Turing, para dar respuesta al planteamiento de Hilbert, se propone aclarar la pregunta: ¿Cuáles son los procesos generales que se necesitan para calcular un número con una cierta propiedad?, se trata entonces de precisar primero la noción de cálculo y de función calculable (del tipo función sucesor: s0+ss0=sss0: 1+2=3) y luego la de *procedimiento efectivo.* Así, en su estudio (Turing, 1995, pp. 48-104) presenta un análisis riguroso sobre lo que hace una persona que calcula, según los símbolos observados y su "estado de espíritu" en un momento dado y muestra la característica formal del pensamiento cuando se realiza un cálculo (base epistemológica propuesta por Hilbert). En este sentido, él va a demostrar que no hay nada en el acto de calcular que no pueda realizarse por un dispositivo mecánico simple, lo que puede tomarse como una primera idea intuitiva de la calculabilidad.

Esta idea intuitiva va a ser formalizada proponiendo la llamada *máquina de Turing*, en donde toda función que cuenta con un procedimiento puede ser *calculable* por intermedio de esta *máquina,* lo que puede llamarse su tesis *mecanicista,* aunque se trate de una máquina abstracta de papel, que consiste en un conjunto regulado de operaciones sobre cadenas de signos (Turing, 1995, p. 51):

> Un hombre que calcula el valor de un número real puede compararse a una máquina susceptible de encontrar un número finito de estados q1, q2, …, qr que se pueden llamar m-configuraciones […] el comportamiento de este hombre que calcula está determinado a cada instante por los símbolos que observa y por su "estado de espíritu" en cada momento.

Como en la propuesta de Post, la estructura de la máquina es muy simple:

- una banda cuyo lado derecho es infinito, dividida en casillas de la misma talla (memoria rudimentaria), las funciones que pueden desarrollarse sobre la banda son escribir, leer y memorizar las etapas intermedias de un cálculo;
- una cabeza de lectura y escritura, capaz de desplazarse a lo largo de la banda, en un tiempo *t*; un conjunto finito de símbolos: 0, 1, *s* (separar expresiones), *d* (principio de la banda), *f* (fin del cálculo);
- un conjunto finito de estados que permiten distinguir varios comportamientos posibles (el principio, la parada, la lectura, la supresión, la adición, …); un conjunto finito de instrucciones.

La máquina de Turing, sin embargo no permite determinar con anterioridad la relación entre los problemas de cálculos infinitos y la obligatoriedad de lo finito del procedimiento. Esta afirmación se sintetiza en: ¿se puede saber, de manera general, sin haber realizado el cálculo, que la máquina va a parar o no? A lo cual, la respuesta es negativa, ninguna máquina o procedimiento permite ver, con anterioridad, el resultado del cálculo, es decir su parada y su decidibilidad.

3.1.3. Procedimiento referido al funcionamiento de una Red Neuronal

Fuera del contexto Lógico Matemático de la *decidibilidad*, Stephen Kleene (1956, pp. 3-41) en su estudio *Representation of events en nerve nets and finitude autómata,* plantea la representación de un organismo y un autómata[5] que reciben un estímulo y efectúan una reacción y la pregunta se sitúa en saber qué tipo de estímulo puede ser representado por el estado del organismo o del autómata (Barbin, 2003, pp. 24-30). Kleene se enfoca en los estímulos de las redes nerviosas y retoma los estudios de estas redes introducidas por W. S. McCulloch y W. Pitts (1943). Para mostrar cómo funciona una Red Neuronal, estos investigadores definen una *red de neuronas formal* constituida por un número finito de neuronas relacionadas entre ellas y determinan que, las funciones de las neuronas, pueden tener dos terminaciones: estimulada ($n_{(e)}$) o inhibida ($n_{(i)}$), se

[5] *Autómata,* definido como una máquina de estados finitos.

puede pensar como circuito eléctrico como: prendido -1- y apagado -0-, así:

$(n_{(e)}=1)$; $(n_{(i)}=0)$.

Esta formalización sencilla de una red neuronal, se convierte en el primer *modelo lógico* del cerebro y presenta las bases para sustentar el principio de transmisión de signos.

Stephen Kleene (1956, pp. 3-41), retoma estos planteamientos y formaliza la noción de Red Neuronal, por medio de la asociación de ésta a una *tabla* (Tabla 1: Red Neuronal Formalizada), compuesta de k neuronas de entrada n_1 , ... n_k, que pueden estar encendidas (1) o apagadas (0) en un tiempo (t) dado, así:

Tabla 1: Red Neuronal Formalizada

T	*N_1*	*N_2*
T	*1*	*0*
t-1	*1*	*1*
t-2	*0*	*1*

Igualmente, al utilizar símbolos lógicos, la Red Neuronal puede ser una red de conjunción (∧), de disyunción (v) o negativa (¬).

Anotaciones

Estas muestras de objetos matemáticos contemporáneos presentan un grado de evolución epistemológico con respecto a los objetos matemáticos de la antigüedad griega. Si bien son objetos abstractos empíricos porque son representaciones del mundo sensible, el cerebro, la función de calcular o la red neuronal, estarían dentro de la línea aristotélica, estos no corresponden ni a la representación de esencias, ni al objeto sensible como tal sino al *cómo se hace el cálculo o la red neuronal*, etc., lo que correspondería al *procedimiento efectivo*, que debe ser totalmente formalizado y sobre el cual se pueden realizar cálculos. Razón por la cual, estos procedimientos han sido recategorizados como *objetos* y siguen el lineamiento de Hilbert en el cual nuestro *pensamiento sería finitista y funcionaría de manera efectiva*, de ahí el recurso al ser humano en sí mismo, tanto en su funcionamiento corporal como mental. Pero este recurso es más de tipo *intuicionista,* porque la base real es la existencia de una intuición mental o corporal, que para Hilbert, asegura la representación del objeto matemático. De esta manera, estos objetos matemáticos, *máquinas lógicas* o procedimientos efectivos serían objetos abstractos empíricos e intuicionistas.

3.2. Características de la formalización de la representación de máquinas lógicas

El lineamiento epistemológico de Hilbert, en el que *todo problema matemático tiene solución*, el cual requiere una formalización hasta el momento que se pueda resolver, conlleva a una serie de ajustes en el desarrollo de la representación, de manera que, entre el objeto sensible o intuitivo y el objeto matemático representado como tal, necesita pasar por tres acciones (Pradilla, 2008, pp. 20-25): la simulación, la realización de un modelo a partir de lo simulado y la adecuación de formas de representación a las máquinas lógicas o procedimientos, según el caso, así:

- la *simulación*, en la cual se reproducen los efectos lógicos del fenómeno, comportamiento u objetos empíricos. Simular, tomado en el sentido de "*hacer parecer como* real y no tomar el fenómeno como tal" (Nouveau Petit Larousse, p. 527), no se trata, entonces, de reproducir un comportamiento con exactitud, lo que sería una *imitación*. Son entonces los efectos lógicos que se presentan como lo *real* y no el fenómeno como tal. La simulación es del campo de la experiencia pero el *objeto-producto* de esta simulación es del orden lógico-teórico. La simulación busca recrear las condiciones de producción de lo real y de la objetivación de los fines pasa a la objetivación de los medios a partir de una estructura lógica matemática (Quéau, 1986, p. 147). De manera que, no se simula al hombre en sus relaciones adaptativas con un ambiente (lo que sería una imitación biológica) sino las representaciones lógicas que el cerebro humano es susceptible de elaborar, es decir se utiliza el conjunto formal de la lógica que se considera como la base de las representaciones.
- El objeto-producto de la simulación es un *modelo* que toma un lugar central en el desarrollo de la maquina lógica. El *modelo* es en principio, el objeto sensible, empírico o intuitivo que se representa mientras que, en este contexto de las máquinas lógicas, el *modelo* es lo representado (Dupuy, 1994, pp. 15-30). El modelo- máquina es una ¨idealidad¨, formalizada y matematizada que representa las modalidades de su construcción y no *el ser* de los objetos que se representan. Igualmente, el modelo, por construcción, es susceptible de realizaciones materiales múltiples, sin que el modelo sea alterado. Así, el *modelo- máquina* tiene una vida propia, una dinámica autónoma independiente de toda realidad fenomenológica, que facilita sus cálculos y la utilización lógica.
- Las formas de representación, que en principio son de dos naturalezas, la *numérica* y la *simbólica*, en donde esta última, en estas representaciones contemporáneas, sigue una ampliación

considerable, nos encontramos con formas como las tablas, los gráficos, procesos y notablemente los lenguajes y los procedimientos efectivos.

- En cuanto a los *lenguajes*, han tenido que evolucionar, debido a que dentro de la máquina lógica o procedimiento efectivo es necesario contar con expresiones sin ninguna ambigüedad con signos precisos, porque según Frege (1971, p. 64), "los signos tienen, para el pensamiento, la misma importancia que tiene para la navegación, la idea de utilizar el viento, con el fin de luchar contra el viento". Es así que, un lenguaje completamente codificado, constituido de unidades elementales que permitan expresar los símbolos requeridos para el desarrollo de la máquina lógica, se hacen necesarios. En este sentido, Turing determina que los símbolos, números, operaciones e instrucciones se pueden reducir a un lenguaje binario para asegurar su generalidad, comprensión y su cálculo.
- En cuanto a los *procedimientos y procesos* que utiliza una máquina, se pueden utilizar estructuras predeterminadas, como por ejemplo, la utilización del tratamiento de la discontinuidad o la retroacción. De manera que, si la mayoría de los fenómenos de la naturaleza se desarrollan en lo continuo, el desarrollo de esta máquina se basa al contrario, en la *discontinuidad*. Así, la complejidad de este tipo de fenómenos, se vuelve comprensible. El fenómeno se representa con un formalismo simplificado (la red de neuronas booleanas de McCulloch y Pitts o la *máquina de Turing).* Lo esencial del método de estos desarrollos, consiste en:

> [...] suponer no conocido [...] algo que se conoce (los datos de la neurofisiología [por ejemplo]) y promover una realidad ficticia (neurona formal), único procedimiento aceptable si se quiere aprehender la función calculadora del cerebro a pesar de su gran complejidad estructural [...], es necesario amputarle a la neurona condiciones [...] de su funcionamiento para no quedarse sino con la abstracción de un funcionamiento binario (discontinuo). (Sciences Cognitives: textes fondateurs (1943-1950), 1995 p. 300).

4. Conclusiones

La *representación* como noción de base del desarrollo matemático, ha seguido una evolución epistemológica[6] muy importante desde sus inicios hasta las aplicaciones contemporáneas. Si bien las dos líneas basadas en la existencia del objeto que se representa, se van a conservar dentro de toda la evolución, la línea aristotélica va a ampliarse demostrando que los objetos empíricos o sensibles tienen varias perspectivas para desarrollarse, lo que se ve en la representación de los objetos contemporáneos.

Con respecto a éstos, en la noción de *máquina lógica*, vemos un cambio epistemológico, porque lo que se llamaba *máquina,* era manual, mecánica y en cuanto a las máquinas que hacían cálculos sus dispositivos eran materiales y mecánicos igualmente. La *discontinuidad* en esta tradición reside en el hecho que este desarrollo pierde el carácter pragmático de la resolución de problemas y se vuelve teórico y lógico. De esta manera la *mecanización* abstracta del cálculo, no lo hace más un ingeniero sino los matemáticos y los lógicos que operan sobre símbolos y no sobre las ruedas dentadas o relés de comunicación.

Esto lleva a que, la iniciativa del cálculo se delega a esta máquina, que hasta aquí era relativa al espíritu humano, se abre de esta manera el campo de aplicación, no solo para los números sino para cualquier aplicación simbólica. Es así que, se renueva la manera como se explica el tratamiento del conocimiento y sus contenidos, se transforma igualmente el imaginario científico porque se puede decir que estas máquinas presentan la *encarnación del espíritu* en el mundo, en donde su estructura formal asegura las funciones del conocimiento, de manera que entre el sujeto epistémico, reemplazado por la *maquina lógica* y el mundo que se quiere conocer, la mediación se hace por medio de estructuras lógicas y de cálculos.

Si realizar un cálculo por un hombre que calcula es en principio realizarlo en su cabeza, realizarlo en una *máquina lógica* es objetivarlo o materializarlo y volverlo comprensible de una manera general, confiriéndole un estatuto de autonomía, que es la base de las computadoras modernas.

> Presentar una ecuación [...] no significa comunicar entre espíritus sino, es suponer entre los espíritus, un tercero indiferente que decide en su lugar, un interlocutor que no admite falla ni redundancia en lo que se le dirige (Sciences Cognitives: textes fondateurs (1943-1950) 1995 xxiv).

Igualmente, desde entonces, es posible abordar cuestiones centrales de la lógica vía la *calculabilidad mecánica*, en donde problemas planteados desde la lógica, como el problema de la decisión (*Entscheindungsproblem*), con la correspondencia al problema de la parada de la Máquina de Turing, en la realización de un cálculo, marca los límites de la decidibilidad y entonces de una noción muy importante en las matemáticas contemporáneas, la calulabilidad y posteriormente la noción de informática. De manera que, en esta noción, solamente se incluyen funciones calculables, es

[6] *Epistemología*, vista como una evolución en el desarrollo de las Matemáticas, señalando sus puntos de ruptura, que conducen a este desarrollo.

decir aquellas que pueden ser resueltas por un sí o un no (verdadero o falso; 1 o 0) o del genero $x \in A$: x pertenece a A?

Así mismo, se plantean desarrollos tan importantes como la correspondencia entre el cálculo por una máquina lógica y la demostración de una formula en un sistema lógico y la síntesis de elementos numéricos y simbólicos del cálculo, ampliando el campo de las formas de representación del cálculo y por ende el de las matemáticas en general.

Finalmente, todos los desarrollos en las máquinas lógicas y en las matemáticas de la calculabilidad son la base para la creación de las máquinas físicas o *computadores* e igualmente de la Ciencia de la computación y la Informática.

Referencias

Aristóteles (1997). *Organon: I-Catégories, II De l'Interprétation*. Traducción y notas por J. Tricot. Paris, J. Vrin.

— (1991). *La Métaphysique*. Traducción de Jules Barthélemy-Saint-Hilaire revisada y anotada por Paul Mathias. Introducción y dossier de Jean-Louis Poirier. Pocket. Paris, Pocket.

Blanché, R. y Dubucs, J. (1996). *La Logique et son Histoire.* Paris, Armand Colin.

Barbin, E. (2003). *Les deux faces des théorèmes de Kleene et la question des machines*. En: *Calculs et formes*, Paris: Ellipses Editions Marketing, pp. 24-51.

Bergson, H. (1907). *Évolution Créatrice*. Paris: PUF. Bibliothèque de Philosophie Contemporaine.

Boniface, J. (2003). *Calculs et formes*. Obra colectiva coordinada por J. Boniface. Paris: Ellipses Editions Marketing.

— (2004). *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Paris:Librairie Philosophique J. Vrin. (Mathesis): Michel Blay- Hourya Sinaceur).

Brunschvicg, L. (1972). *Les Étapes de la Philosophie Mathématique.* Nueva impresión aumentada de un Prefacio de M. Jean-Toussaint Desanti. Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard.

Caveing, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Obra publicada con el concurso del Centre National du Livre ». Paris:Lib. Philosophique J. Vrin.

Dahan - Dalmedico, A. y Peifer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques: Routes et dédales*. Paris, Seuil.

Desanti, J. T. (1986). *Les idéalités mathématiques: recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*. Paris: Editions du Seuil.

Dupuy, J. P. (1994). *Aux Origines des Sciences Cognitives*. Paris: Editions La Découverte.

Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Trad. e intr. de Claude Imbert. Paris: Editions du Seuil.

Gandy, R. O. (1998). *The confluence of ideas in 1936.* En: *The Universal Turing Machine. A half-century survey* (pp. 54-110).

Gardies, J. L. (2004). *Du mode d'existence des Objets de la Mathématique*. Paris, Vrin.

Gödel, K. (1931). *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés I*. En: Nagel, Ernest ; Newman, James R. ; Gödel, Kurt; Girard, Jean Yves, *Le Théorème de Gödel*. Traducciones del inglés y del alemán por Jean Baptiste Scherrer. Paris, Editions du Seuil, l989, pp.105-143.

Hilbert, D. (1971). *Grundlagen der Geometric*. Traducción francesa : *Les Fondements de Géométrie*, Laugel, éditeur. Crítica de Paul Rossier, Paris, Dunond.

—, y Bernays, P. (2002): *Fondements des Mathématiques 1.* Traducción de la obra: *Grundlagen der Mathematik 1* (Springer) 2ª.ed. (1968) con los pasajes paralelos de la 1ª. edición (1934). Traducción del alemán por F. Gaillard y M. Guillaume. Paris, Ed. L'Harmattan, 2 vols.

Kleene, S. C. (1956). *Representation of events en nerve nets and finitude automata*. En: Shannon, C.E. y McCarthy, (eds.), Princeton University Press, Princeton, 1956. p. 3-41.

Kunzmann, P. –Burkard, F. P. y Wiedmann, F. (1993). *Atlas de la Philosophie.* Torino, G. Canale & C. S. p. A.

Largeult, J. (1992). *L'intuitionisme*. Paris:PUF. *Que sais-je?*

Lassègue, Jean. (1998). *Turing*. Paris, Les Belles Lettres.

McCulloch, Warren S. (1949). The Brain as a Computing Machine. *Electrical Engineering,* June 1949, LXVIII, 492-497. Tradución francesa: "Du cerveau comme calculateur", en «Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)»,189-214.

— y Pitts, Walter. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity". *Bulletin of mathematical biophysics*, vol. 5, 1943, 115- 133. Traducción francesa: Un Calcul Logique des Idées Immanentes dans l'Activité Nerveuse, en: *Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950),* pp. 57-91.

Nouveau Petit LAROUSSE. (1969). Paris: Librairie LAROUSSE.

Platón. (1966). *La République.* Introducción y notas por Robert Baccou. Paris, GF-Flammarion.

Post, E. L. (1936). Finite Combinatory Process. Formulation I. *J. Symbolic Logic*, 1, 103- 105; reimpreso en *The Undecidable*, M. Davis ed. , 1965.

Quéau, P. (1986). *Eloge de la simulation*. Paris, Camp Vallon, Collect. *Milieux.*

Sciences Cognitives: textes fondateurs (1943- 1950). (1995). Wiener, Rosenblueth, Bigelow, McCulloch, Pitts, von Neumann, Hebb, Weaver, Shannon, Turing. Compilados y traducidos por Aline Pélissier. Presentados y anotados por Alain Tête. Paris, PUF.

Turing, A. M. (1995). Computing Machinery and Intelligence. En : *Mind*, vol. 59, no. 236, 1950. Traducido del Inglés por Patrice Blanchard : Les Ordinateurs et la Intelligence, en : *La Machine de Turing*. Paris: Editions du Seuil, 1995, 133-175.

— (1995). On Computable Numbers, with Application to the Entscheidungsproblem. En: *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1937. Traducción francesa: Théorie des nombres calculables, suivie d'une application au problème de la décision. Traducido del inglés y anotado por Julien Basch. En: *La Machine de Turing*. Paris, Editions du Seuil, 1995, 47-104.

Wagner, P. (1998). *La Machine en Logique*. Paris:PUF. (*Science Histoire et Société)*.