Programação Linear: uma possibilidade para o Ensino Médio

Gilmara Aparecida Silva, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Brasil

Resumo: *O presente trabalho pretende discutir e descrever uma possível abordagem sobre o tema Programação Linear no Ensino Médio. Uma pergunta constante que ouvimos dos nossos alunos, principalmente no Ensino Médio, é em relação à aplicabilidade dos conteúdos estudados em Matemática. O estudo de problemas contextualizados envolvendo equações e inequações lineares resolvidos por determinados métodos, que são estudados em Programação Linear, pode contribuir para que os alunos percebam a aplicabilidade da Matemática bem como as interrelações entre vários conteúdos e conceitos matemáticos. Apesar de ser um conteúdo fortemente explorado no ensino superior, aqui mostramos sua possibilidade um estudo inicial durante a educação básica recorrendo apenas a conceitos já estudados em anos anteriores.*

Palavras-chave: *programação linear, ensino médio, resolução de problemas*

Abstract: *This paper aims to discuss and describe a possible approach on the subject Linear Programming in High School. A constant question we hear from our students, especially in high school, is in relation to the applicability of the contents studied in mathematics. The study of contextualized problems involving linear equations and inequalities solved by certain methods, which are studied in linear programming, can help students understand the applicability of mathematics as well as the content and interrelationships among various mathematical concepts. Despite being heavily exploited a content in higher education, here's your chance during an initial study using only basic education concepts already studied in previous years.*

Keywords: *Linear Programming, High School, Problem Solving*

Introdução

Este trabalho pretende discutir aspectos da Programação Linear (PL) que podem ser estudados no Ensino Médio. Para tanto, será discutido e situado dentro da Proposta Curricular do Estado de São Paulo[1] os conceitos necessários para que o aluno se familiarize com tal tema, visto a simplicidade de tais conceitos necessários que são tradicionalmente abordados na educação básica.

Muitas vezes os alunos questionam sobre a aplicabilidade de determinados conceitos matemáticos. O tema Programação Linear pode facilitar a nossa justificativa, visto que tem muita aplicabilidade na resolução de situações problema que, com a utilização de problemas interessantes, pode desafiar a curiosidade e a capacidade de raciocínio dos alunos.

Problemas resolvidos empregando a programação linear podem ser utilizados no estudo das inequações lineares, funções, matrizes, determinantes e geometria analítica no decorrer do Ensino Médio. Com isso, pode levar o aluno a perceber as interconexões existentes entre os diversos conceitos tratados pela matemática.

Dentre os vários problemas que são resolvidos em Programação Linear, existe uma classe que é estudada na disciplina Pesquisa Operacional que são resolvidos com conceitos e procedimentos estudados no Ensino Fundamental e Médio. Esses problemas são os problemas de otimização: determinar o máximo ou mínimo de determinadas situações.

Sendo assim, iremos analisar os anos nos quais os conteúdos são estudados de acordo com a Proposta Curricular da Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo.

[1] Documento com subsídios aos professores da Rede Estadual do Estado de São Paulo com o objetivo de organizar melhor o sistema educacional. Material disponível em: http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf

Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología
Volumen 1, Número 2, 2014, <http://sobrelaeducacion.com>, ISSN 2386-8791

Problemas de otimização caracterizam-se por não mostrar em seu enunciado a função a ser otimizada, necessitando que o aluno recorra a conhecimentos prévios e habilidade de resolver situações-problema. No Ensino Médio, a maioria dos problemas conduz a função polinomial de segundo grau, mas também há problemas elementares que não se enquadram nisso, como por exemplo, problemas que podem ser resolvidos utilizando a Programação Linear.

A Programação Linear é uma técnica de otimização empregada na resolução de problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares, quer sejam equações ou inequações.

As características cognitivas são cada vez mais valorizadas, como as capacidades de resolver problemas, continuar aprendendo, sendo que essas características são pertinentes em situações mais complexas. Ao trabalhar com a resolução de problemas, procura-se também despertar o interesse do aluno que, na maioria das vezes, tem a Matemática como difícil de entender, desinteressante, descontextualizada, infalível e pronta. Nesse estudo, o aluno tem a oportunidade de rever conceitos estudados sendo empregados para resolver situações do cotidiano.

Ao se trabalhar com a resolução de problemas, uma das tendências propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[2], pode contribuir para atingir um dos objetivos da educação, que é possibilitar que cada indivíduo alcance seu potencial crítico, criativo, estimulando e facilitando sua convivência em sociedade, exercendo efetivamente sua cidadania. Por isso, o cotidiano da sala de aula deve modificar-se, tornar-se mais atraente, mais de acordo com a realidade dos alunos, para que esses tenham um aproveitamento melhor e um interesse maior em relação aos conteúdos a serem assimilados e, também, contribuindo para a diminuição da repetência e evasão escolar.

Tal estudo possibilita e favorece a utilização de softwares gráficos que contempla a educação tecnológica básica que, de acordo com as diretrizes nacionais de educação, deve orientar o currículo do Ensino Médio, onde cada disciplina curricular deve relacionar teoria e prática, inserindo o domínio dos princípios científicos e tecnológicos como competência que o aluno deve demonstrar ao final da educação básica.

O emprego de softwares gráficos é muito útil e pode ser utilizado visando também aumentar o interesse do aluno além de facilitar em relação ao tempo e entendimento dos conceitos.

Importante ressaltar que, mesmo com o emprego de softwares gráficos, a questão da modelagem matemática, a capacidade de entendimento e interpretação do problema a ser resolvido é de fundamental importância para a resolução da situação apresentada.

De acordo com Frant (1994), a adoção da informática pode facilitar a implementação de uma proposta que privilegie a aprendizagem cooperativa, em detrimento da competitiva, e colocar o aluno como sujeito do processo de ensino e aprendizagem.

Para fazermos com que o aluno participe intensamente do seu aprendizado, através da pesquisa em grupo, da experimentação e de outras atividades que culminem com a evolução intelectual a prática pedagógica deve transformar-se.

> Nesse contexto, o professor pode deixar de ser a fonte única de informações, precisando desempenhar outras funções no sentido de orientar os estudantes na pesquisa de novos conhecimentos e administrar as dificuldades decorrentes do uso das tecnologias e do excesso e dispersão de informações nas redes informáticas” (Penteado, 2000, p. 10)

Programação linear

Pesquisa Operacional

Pesquisa Operacional (P.O.) foi o termo utilizado pela primeira vez na Grã-Bretanha em 1938 para designar o estudo sistemático de problemas decorrentes de operações militares. Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais, que foca a tomada de deci-

---

[2] Os Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN — são referências para os Ensinos Fundamental e Médio de todo o país. O objetivo dos PCN é garantir a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais.

sões, aplica conceitos e métodos de áreas científicas diversificadas. Serve para avaliar e encontrar soluções que melhor contemplem os objetivos iniciais do problema.

Durante a 2ª Guerra Mundial um grupo de cientistas (matemáticos, engenheiros, economistas, físicos,...) assessoravam as forças militares na resolução de problemas que incluíam o emprego eficiente do radar, uso de canhões antiaéreos, táticas de bombardeio a submarinos, etc., dando início ao que denominamos de Pesquisa Operacional. Devido a eficácia na resolução de tais situações, mesmo com o final da guerra, os grupos se disseminaram e se mantiveram. O marco definitivo para a Pesquisa Operacional foi a publicação do método simplex para a resolução de problemas de Programação Linear, em 1947, por George Dantzig.

Com o surgimento dos computadores na década de 1950 tornou possível o desenvolvimento de novas metodologias para a resolução de situações práticas e cada vez mais complexas. Esta fórmula de abordar problemas complexos se mantém até hoje e agrega, em sua teoria, quatro ciências fundamentais para o processo de preparação, análise e tomada de decisão: economia, matemática, estatística e informática.

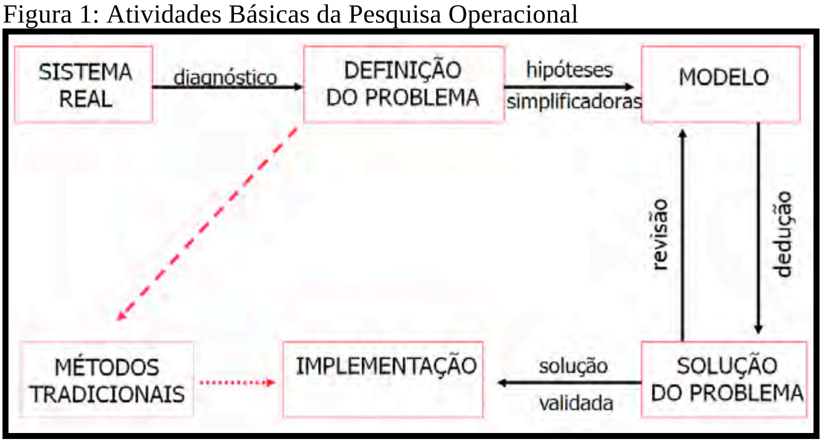
No Brasil, a Pesquisa Operacional surgiu por volta da década de 1960 e em 1969 foi fundada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO).

De acordo com Andrade (2004), a Pesquisa Operacional é definida como a arte de aplicar técnicas de modelagem a problemas de decisão por meio de métodos matemáticos e estatísticos buscando encontrar a solução ótima de maneira sistemática. Dentro de um enfoque contemporâneo, a Pesquisa Operacional considera as interações com o meio ambiente para a formulação da modelagem de um problema, que envolve três aspectos: a definição das decisões a serem tomadas; as restrições que limitam cada escolha das decisões e o objetivo que determinam as preferências na escolha das decisões.

Face ao seu caráter multidisciplinar, a Pesquisa Operacional é uma disciplina científica de características horizontais com suas contribuições estendendo-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e a Gestão Empresarial.

Para facilitar o processo de análise de decisão, a Pesquisa Operacional utiliza modelos para resolver determinados problemas. Uma das técnicas mais utilizadas na abordagem do problema é a Programação Linear.

Figura 1: Atividades Básicas da Pesquisa Operacional



Fonte: Puccini, 1987.

Problema de Otimização

Problemas práticos podem exigir a utilização de sistemas de suporte à decisão, softwares destinados a apoiar o processo de tomada de decisões. Tais sistemas geralmente oferecem opções de modelagem matemática e de métodos quantitativos para tomada de decisões que são os modelos de otimização, pois buscam obter as decisões ótimas, como lucro máximo ou mínimo custo, por exemplo.

Uma função numérica contendo certo número de variáveis que podem assumir valores em um determinado domínio onde buscamos maximizá-lá ou mininizá-lá é um problema de otimização. Tais funções buscam retratar os objetivos do problema a ser resolvido bem como as restrições possíveis que existam.

Programação Matemática

A Programação Matemática trata de problemas de decisão através de modelos matemáticos que procuram representar o problema real. Através de métodos matemáticos, procura encontrar a solução ótima buscando maximizar/minimizar recursos, custos, operações, etc.

É uma linha de conhecimento muito extensa na qual podemos definir:

- Programação linear: onde as funções são representadas por funções lineares;
- Programação não-linear: onde pelo menos uma das funções é representada por funções não lineares.

Programação Linear

Como mencionado anteriormente, para cada problema há um modelo adequado. Ao conjunto de modelos e métodos de otimização utilizados denominamos Programação Linear, na qual podemos entender programação como sinônimo de planejamento.

O papel dos modelos

Modelo é uma idealização ou uma visão simplificada da realidade na qual se emprega símbolos matemáticos para representar as variáveis de decisão do sistema real, que é composto de uma função objetiva linear e de restrições técnicas representadas por um grupo de inequações também lineares. A solução consiste em encontrar valores adequados das variáveis que otimizem (maximizar/minimizar) o desempenho do sistema.

A formulação matemática consiste em identificar as variáveis de decisão e determinar a grandeza a ser otimizada expressando-a como uma função matemática que denomina-se função objetivo. A seguir, deve-se identificar todas as exigências, restrições e limitações representando-as matematicamente, que são as restrições. Expressar todas as condições implícitas.

Diz-se que um problema de Programação Linear está na forma geral se estiver na seguinte forma:

$$\text{Max (ou Min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

Exemplo de Formulação de Modelos

Uma determinada pessoa é forçada pelo seu médico a fazer uma dieta alimentar que forneça, diariamente, pelo menos as seguintes quantidades de vitaminas A, B, C e D:

Tabela 1: Quantidade Mínima Diária das Vitaminas

Vitaminas	*Quantidade Mínima Diária (mg)*
A	80
B	70
C	100
D	60

Fonte: Dante, 2010.

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contêm os seguintes miligramas de vitaminas em cada uma de suas unidades medidas:

Tabela 2: As vitaminas nos alimentos

Vitaminas	*Alimentos*			
	Leite	*Arroz*	*Feijão*	*Carne*
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Fonte: Dante, 2010.

Os custos unitários desses alimentos são os seguintes:

Tabela 3: Custo dos alimentos

	Custo (R$)
Leite	R$ 1,00
Arroz	R$ 0,80
Feijão	R$ 1,20
Carne	R$ 3,50

Fonte: Dante, 2010.

Deseja-se saber o consumo diário de cada um desses alimentos de tal maneira que a dieta satisfaça as prescrições médicas e seja a de menor custo possível.

Técnica de Solução: Método Gráfico no R²

Consiste em representar num sistema de eixos ortogonais o conjunto das possíveis soluções do problema. O desempenho do modelo é avaliado através da representação gráfica da função objetiva.

A resolução pode-se determinar graficamente se o problema tem:

- Solução única
- Múltiplas soluções
- Solução ilimitada
- Solução Infactível

Exemplo da Resolução Gráfica no R²

Representar graficamente a solução do sistema:

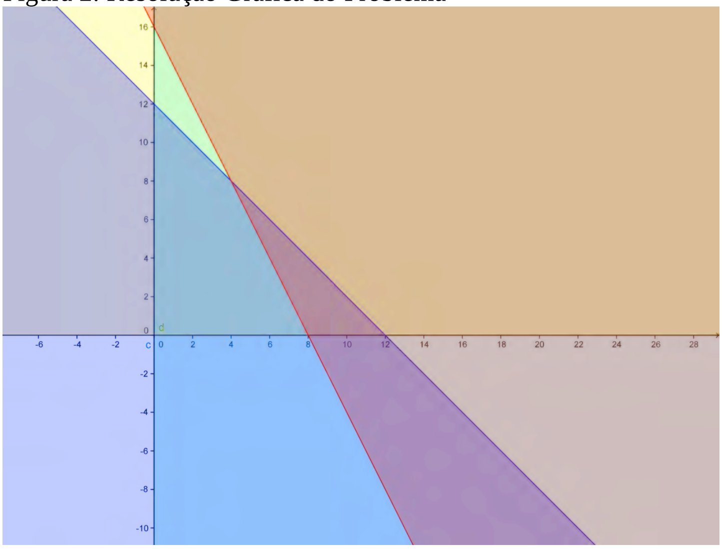
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \ge 16 \\ x_1 \ge 0\,;\, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Representar cada uma das retas correspondentes:

(1) $x_1 + 3x_2 \le 12$ $\quad$ $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4$; $\quad$ $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 12$

(2) $2x_1 + x_2 \ge 16$ $\quad$ $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 16$; $\quad$ $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 8$

Figura 2: Resolução Gráfica do Problema



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Fases de um Estudo em Programação Linear

Um estudo em Programação Linear costuma envolver seis fases que são:

- Formulação do problema – nesta fase deve-se colocar o problema de maneira clara e coerente, definindo os objetivos a alcançar e quais os possíveis caminhos alternativos para que isso ocorra, considerando as limitações do sistema;
- Construção do modelo do sistema – os modelos que interessam são os modelos matemáticos, formados por um conjunto de equações e inequações lineares;
- Cálculo da solução através do modelo – técnicas matemáticas específicas. A construção do modelo deve levar em consideração a disponibilidade de uma técnica para o cálculo da solução;
- Teste do modelo e da solução – é realizado com dados empíricos do sistema. Se houver dados históricos, eles serão aplicados no modelo, gerando um desempenho que pode ser comparado ao desempenho observado no sistema;
- Estabelecimento de controles da solução – na construção e experimentação com o modelo identificam parâmetros fundamentais para solução do problema. Qualquer mudança nos parâmetros deverá ser controlada para garantir a validade da solução adotada;
- Implantação e acompanhamento – dever ser acompanhada para se observar o comportamento do sistema com a solução adotada. Algum ajuste pode ser requerido.

Conceitos matemáticos necessários para o estudo de programação linear no ensino médio

Os problemas de Programação Linear são de interesse visto que podem ser mostrados como ponto de partida de conceitos matemática da Educação Básica. Tais problemas são propostos na língua materna e permitem a conversão e coordenação de registros de representações. Requer determinados tratamentos, conversões e coordenações que podem ser dificuldades para os alunos dependendo de como tais conceitos foram inseridos ou não no processo de ensino e aprendizagem.

Uma das etapas necessárias para a resolução de um problema de Programação Linear é a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa. A estratégia gráfica para a resolução dos problemas requer uma interpretação global do gráfico.

Para que um aluno do Ensino Médio consiga resolver determinados problemas de Programação Linear, será necessário alguns conteúdos vistos no decorrer do seu estudo.

Inequações lineares com duas incógnitas

Para resolver um problema de programação linear utilizando o método gráfico será necessário o estudo de inequações lineares com duas incógnitas.

Inequação é uma sentença matemática, com uma ou mais incógnitas, expressa por uma desigualdade. Consideremos f e g funções de n variáveis, temos: $f < g$; $f \geq g$ ou $f \leq g$ exemplos de inequações. Se f e g são funções lineares, então as inequações são ditas inequações lineares.

Exemplos de inequações lineares

Alguns exemplos de inequações lineares:

i. 2x + 4 > x é um exemplo de uma inequação linear com uma incógnita (x);
ii. x + y < 5 é uma inequação linear com duas incógnitas (x e y).

Solução de uma inequação linear

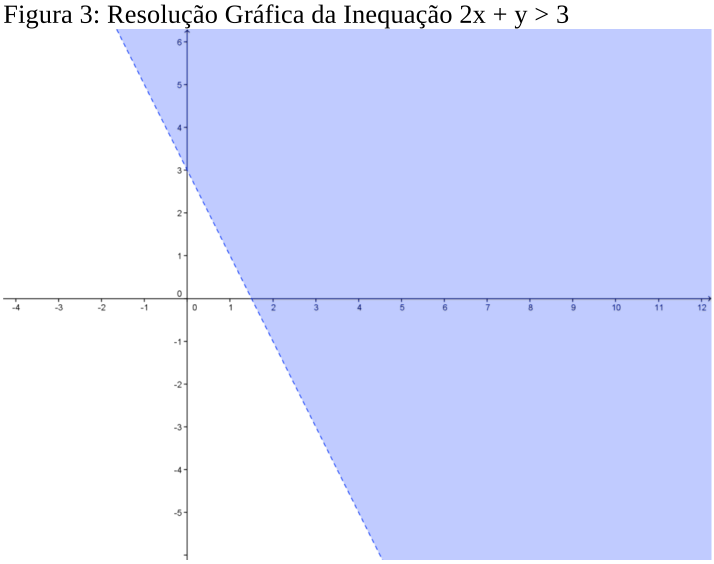
O número real x0 é solução da inequação f(x) > g(x) se, e somente se, é verdadeira a sentença f(x0) > g(x0). Considerando a inequação linear 2x – 4 < 0, temos que o número 1 é solução visto que 2.1 – 4 < 0 é uma sentença verdadeira.

Conjunto solução de uma inequação linear

Ao conjunto S de todos os números reais x tais que f(x) > g(x) é uma sentença verdadeira chamamos solução da inequação. Considerando a inequação linear 2x – 4 < 0, o conjunto solução dessa inequação é S = $\{x \in IR / x < 2\}$.

Para a inequação linear 2x + y > 3, o conjunto solução dessa inequação é a região do plano limitado pela reta de equação 2x + y = 3 na qual os pontos (x,y) tornam verdadeira a desigualdade 2x + y > 3. Graficamente, temos:

Figura 3: Resolução Gráfica da Inequação 2x + y > 3



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Sistemas Lineares com Duas Incógnitas

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+......+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+......+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

, com $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$, m e n números naturais.

Sistemas Lineares e Matrizes

Podemos escrever o sistema S na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Outra matriz que podemos associar ao sistema S é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

. Essa matriz é denominada matriz ampliada do sistema S.

Exemplos de Sistemas Lineares

Alguns exemplos de sistemas lineares:

$\begin{cases} 3x-5y=10 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ é um sistema linear 2x2 nas incógnitas x e y.

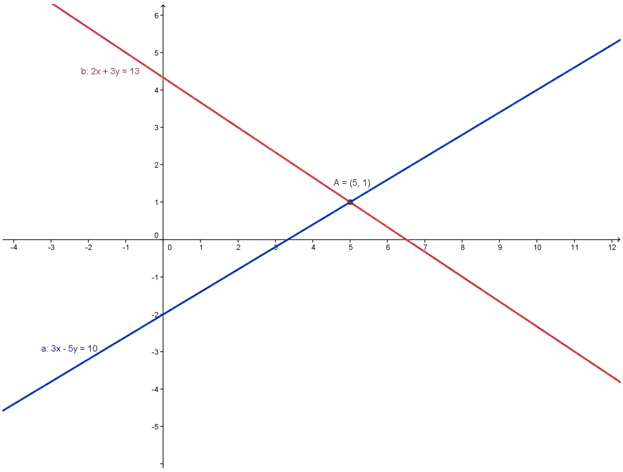
$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x-y-z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}$ é um sistema linear 3x3 nas incógnitas x,y e z.

Solução de um Sistema Linear

Dizemos que $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

i - par ordenado (5,1) é solução do sistema $\begin{cases} 3x-5y=10 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 3.5-5.1=10 \\ 2.5+3.1=13 \end{cases}$. Geometricamente, cada equação desse sistema representa os pontos de uma reta no plano. A intersecção entre retas é a solução do sistema.

Figura 4: Resolução gráfica do sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

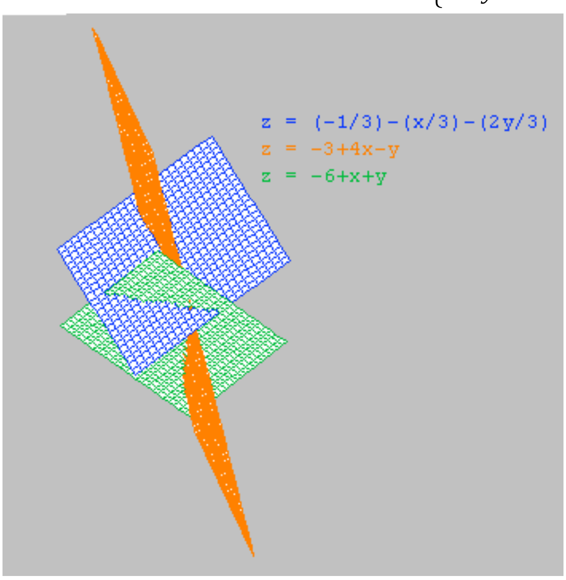


Fonte: Arquivo do pesquisador.

ii - A terna ordenada (1, 3, – 2) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 1 + 2.3 + 3.(-2) = 1 \\ 4.1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$.

Geometricamente, cada equação desse sistema representa os pontos de um plano no espaço. A intersecção entre esses planos é a solução do sistema.

Figura 5: Resolução gráfica do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Sistemas de Inequações Lineares

Um sistema de inequações lineares com duas equações e duas incógnitas é um conjunto de inequações do tipo:

$S = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \Theta b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \Theta b_2 \end{cases}$, onde o símbolo Θ pode ser substituído por uma das seguintes desigualdades: $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.

Exemplo de Sistemas de Inequações Lineares com Duas Incógnitas

Alguns exemplos de sistemas de inequações lineares:

$\begin{cases} x + 2y \leq 9 \\ x - y < 3 \end{cases}$ é um sistema de inequações lineares nas incógnitas x e y.

$\begin{cases} 2x - 6y > 5 \\ 3x - 9y \leq 1 \end{cases}$ é um sistema de inequações lineares nas incógnitas x e y.

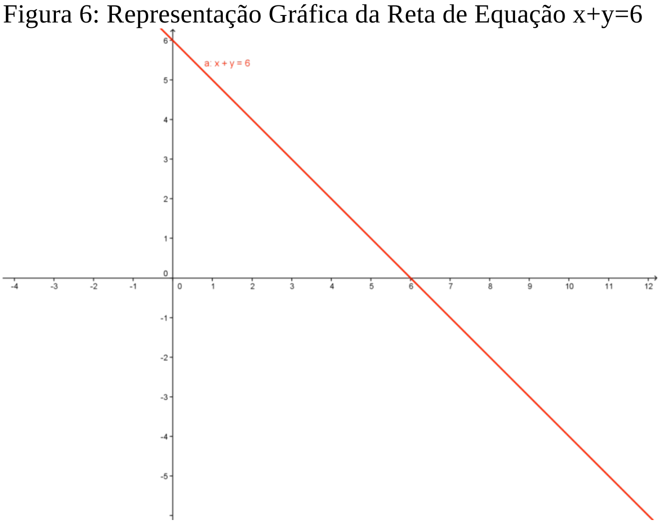
Exemplo da Resolução Gráfica no R²

A representação gráfica de uma equação linear com duas incógnitas é uma reta. A representação de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta corresponde à equação, como vimos em 2.1.3.

i. Resolver graficamente o sistema $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 2x + y > 8 \end{cases}$.

Inicialmente, é traçado a reta x+y=6.

Figura 6: Representação Gráfica da Reta de Equação x+y=6

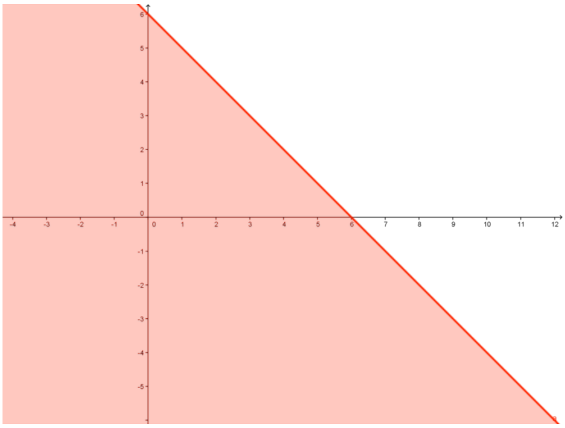


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Depois, verifica-se qual semiplano satisfaz a desigualdade x+y ≤ 6. Para isto, escolhe-se um ponto e substitui-se na desigualdade. Se a desigualdade for verdadeira, este ponto satisfaz a desigualdade bem como todos os demais pontos contidos no mesmo semiplano. Se ao substituir as coordenadas do ponto na desigualdade e for obtida uma desigualdade falsa, os pontos que irão satisfazer a inequação são os pontos contidos no semiplano que não contém tal ponto.

No exemplo, escolhe-se a origem do sistema (0,0). Substituindo na desigualdade, temos: $0+0\leq 6$. Como a desigualdade é verdadeira, temos que todos os pontos deste semiplano que contém a origem (0,0) como satisfazendo. Assim, temos:

Figura 7: Resolução Gráfica da Inequação $x+y\leq 6$

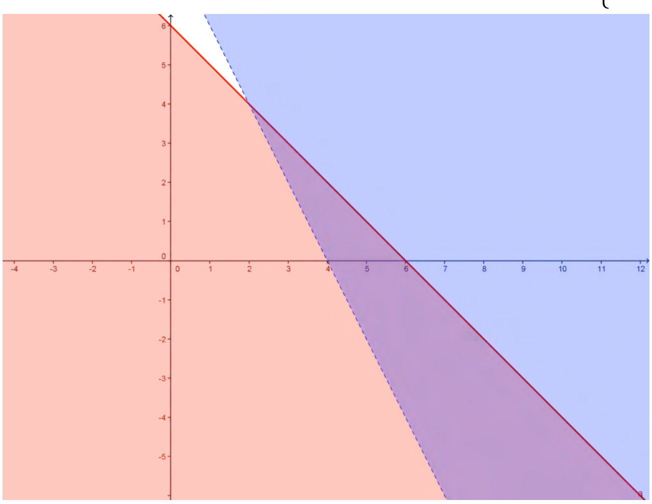


Fonte: Arquivo do pesquisador.

De modo análogo, é traçado a inequação $2x+y>8$.

A solução do sistema corresponde ao semiplano que satisfaz as duas desigualdades. Assim, temos:

Figura 8: Resolução Gráfica do Sistema de Inequações $\begin{cases} x+y\leq 6 \\ 2x+y>8 \end{cases}$



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conceitos Básicos de acordo com a Proposta Curricular

De acordo com a proposta curricular do Estado de São Paulo, no 8º ano do Ensino Fundamental, faz-se o estudo de inequações de 1º grau partindo da sondagem dos conhecimentos que os alunos possuem de Álgebra principalmente verificando o estágio que o aluno se encontra em relação à transposição de problemas da língua materna para a álgebra e vice-versa e ao tipo de equação que o aluno consegue resolver. A partir daí, a sequência didática objetiva a ampliação do repertório de situações de transposição entre linguagens e a ampliação de estratégias de resolução de equações e problemas envolvendo equações do 1º grau. Dando continuidade a sequência didática proposta, inicia-se o estudo das inequações de 1º grau, procurando problematizar o uso das inequações em situações concretas de resolução de problemas. Neste mesmo ano discute-se as equações lineares com duas incógnitas e os métodos de resolução de sistemas lineares algébrica e graficamente que auxilia ao aluno compreender quando o sistema é possível e determinado, indeterminado ou impossível através de sua visualização.

No 9º ano, a proposta curricular prevê o estudo da representação gráfica de diversos tipos de relações de interdependência lineares e não lineares. Propõe a introdução de situações problema que discutem a otimização (problemas de máximo/mínimo), basicamente relacionadas com funções quadráticas.

No 1º ano do Ensino Médio, retoma-se o estudo das funções lineares. Faz-se o estudo gráfico caracterizando o crescimento/decrescimento da função, a taxa de variação, explorando a resolução de situações problema.

O estudo de sistemas lineares é retomado no 2º ano do Ensino Médio a partir de problemas contextualizados em que equações e sistemas de equações lineares são ferramentas importantes na resolução de tais problemas. Aplica-se matrizes no contexto da resolução de sistemas lineares além de determinantes por intermédio da regra de Cramer. A discussão de sistemas lineares também é feita através da regra de Cramer e pelo método da Eliminação de Gauss. Procura-se priorizar procedimentos que permitam aos alunos a diversidade de estratégias de raciocínio na resolução e na discussão de sistemas lineares.

Este momento é oportuno para a introdução da Programação Linear visto que todos os conceitos necessários para tal estudo já foram introduzidos. Caberia ao professor, durante essas discussões, introduzir um problema de programação linear. Seria necessário, relembrar a resolução gráfica das inequações lineares e assim apresentar um tema que pode aguçar o interesse por parte dos alunos.

Resolução de uma situação problema através da programação linear para o Ensino Médio

Neste capítulo será apresentada uma situação problema bastante encontrada em livros didáticos que tratam da Programação Linear no Ensino Médio bem como sua resolução para exemplificar e mostrar que tal tema pode e deve ser trabalhado com alunos nesta escolaridade.

Apesar da simplicidade da situação aqui proposta, possibilita o resgate de vários conceitos matemáticos mostrando ao aluno suas interligações.

Apresentação da Situação Problema

O ideal é que a situação problema seja formulada a partir de uma necessidade real os alunos. No entanto, para introduzir o tema, iremos utilizar um problema que está no livro do autor Dante, 2011. Os demais problemas a serem resolvidos, poderiam ser formulados pelos alunos.

Situação Problema: Um comerciante vende dois tipos de artigo, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 por unidade, e na venda do artigo B tem um lucro de 30 por unidade. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?

Formulação da Função Objetivo e das Restrições

Para resolver deve-se formular a função objetivo. Seja x o número de artigos do tipo A e y o número de artigos B a serem encomendados. Se para cada artigo do tipo A vendido tem-se o lucro de 20 e para cada artigo do tipo B vendido tem-se um lucro de 30, tem-se a função objetivo $L = 20x + 30y$. Essa será a função que se deverá maximizar.

As restrições são:

i. Cabem no máximo 100 artigos. Assim: **x + y ≤ 100**;
ii. Serão vendidos pelo menos 15 artigos do tipo A. Assim: **x≥15**;
iii. Serão vendidos pelo menos 25 artigos do tipo B. Assim: **y≥25**;
iv. O distribuidor entregará no máximo 60 artigos do tipo A. Assim, **x≤60**;
v. O distribuidor entregará no máximo 50 artigos do tipo B. Assim, **y≤50**.

Definição da Região das Possíveis Soluções Ótimas

Para se definir a região que contém as possíveis soluções, deve-se representar as inequações que representam as restrições num mesmo sistema de eixos ortogonais. Pelo menos uma vez, é interessante que o aluno faça tal construção utilizando papel quadriculado e régua. Dessa forma, relembra como um gráfico é construído utilizando tais materiais. Os demais, podem ser construídos com o auxílio de software gráfico que minimizará o tempo e tornará a atividade mais atraente para o aluno devido a utilização de outras tecnologias digitais. O software utilizado será o Geogebra pois o aluno tem a possibilidade de fazer o download gratuito de tal programa.

Utilizando Papel Quadriculado e Régua

Para construir as representações gráficas das inequações que representam as restrições, o aluno deverá inicialmente traçar as equações correspondentes. Para tanto, pode utilizar uma tabela. Atribuindo dois valores para cada reta, terá o gráfico de cada equação.

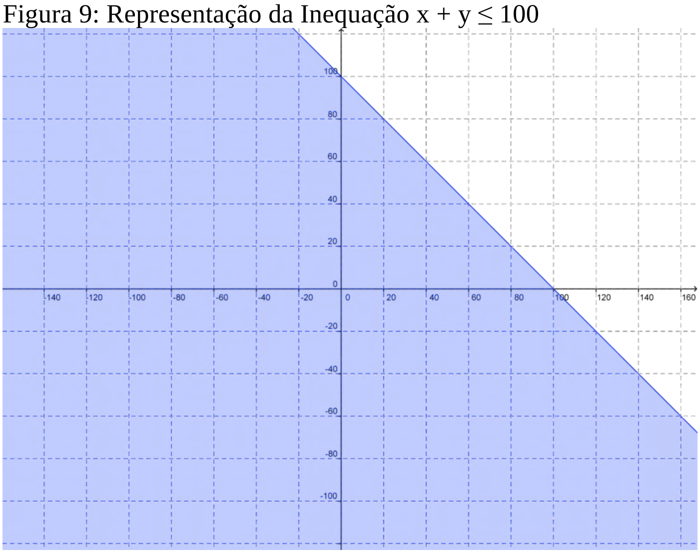
i. Restrição **x + y ≤ 100**.

x + y = 100		
x	y	(x,y)
0	100	(0,100)
100	0	(100,0)

Testa-se o ponto (0,0) na inequação. Obtém-se: 0+0≤100 (verdadeira). Logo, a região do semiplano que contém a origem é solução da inequação x + y ≤ 100.

Marca-se os pontos (0,100) e (100,0) no sistema cartesiano, traça-se a reta e hachura o semiplano que contém o ponto (0,0). Assim:

Figura 9: Representação da Inequação x + y ≤ 100

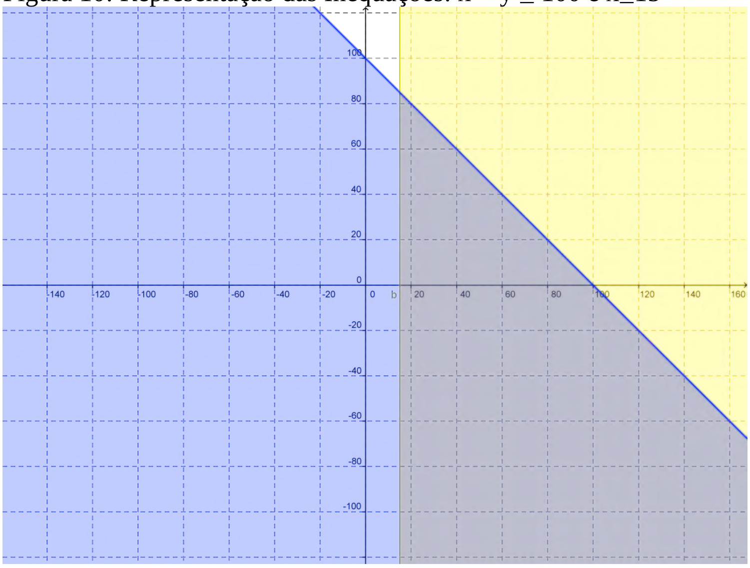


Fonte: Arquivo do pesquisador.

ii. Restrição **x≥15**;

Traça-se a reta x = 15. Testa-se o ponto (0,0) na inequação x≥15 obtendo uma desigualdade falsa. Logo, a região a ser hachurada é o semiplano que não contém o ponto (0,0). Assim:

Figura 10: Representação das Inequações: x + y ≤ 100 e x≥15

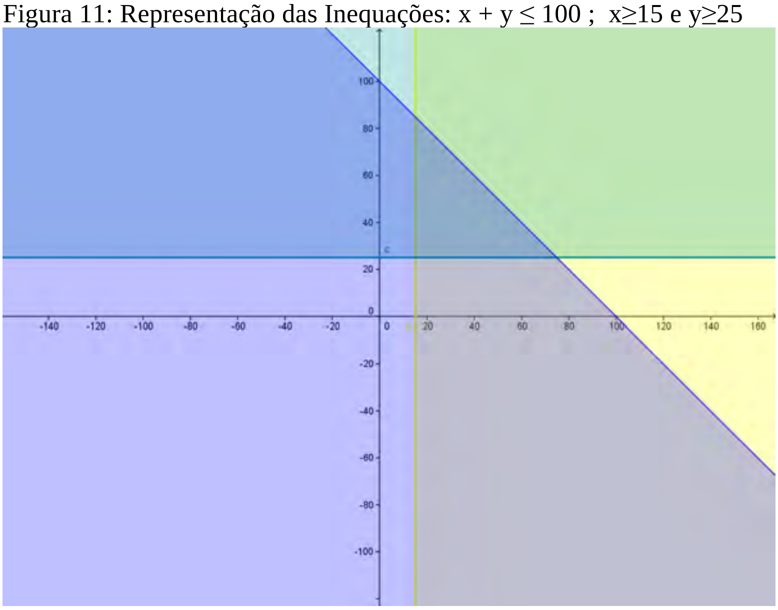


Fonte: Arquivo do pesquisador.

iii. Serão vendidos pelo menos 25 artigos do tipo B. Assim: **y≥25**;

Traça-se a reta y = 25. Testa-se o ponto (0,0) na inequação y≥25 obtendo uma desigualdade falsa. Logo, a região a ser hachurada é o semiplano que não contém o ponto (0,0). Assim:

Figura 11: Representação das Inequações: x + y ≤ 100 ; x≥15 e y≥25

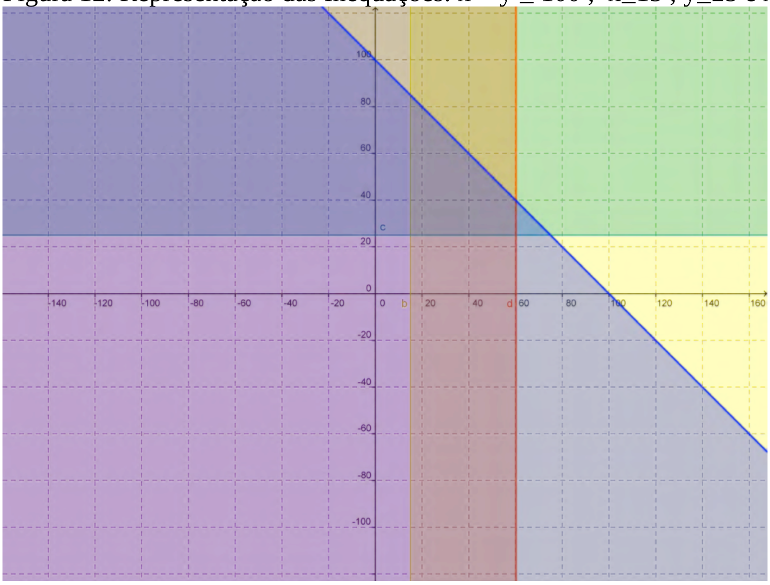


Fonte: Arquivo do pesquisador.

iv. O distribuidor entregará no máximo 60 artigos do tipo A. Assim, **$x \leq 60$**;

Traça-se a reta $x = 60$. Testa-se o ponto (0,0) na inequação $x \leq 60$ obtendo uma desigualdade verdadeira. Logo, a região a ser hachurada é o semiplano que contém o ponto (0,0). Assim:

Figura 12: Representação das Inequações: $x + y \leq 100$; $x \geq 15$; $y \geq 25$ e $x \leq 60$

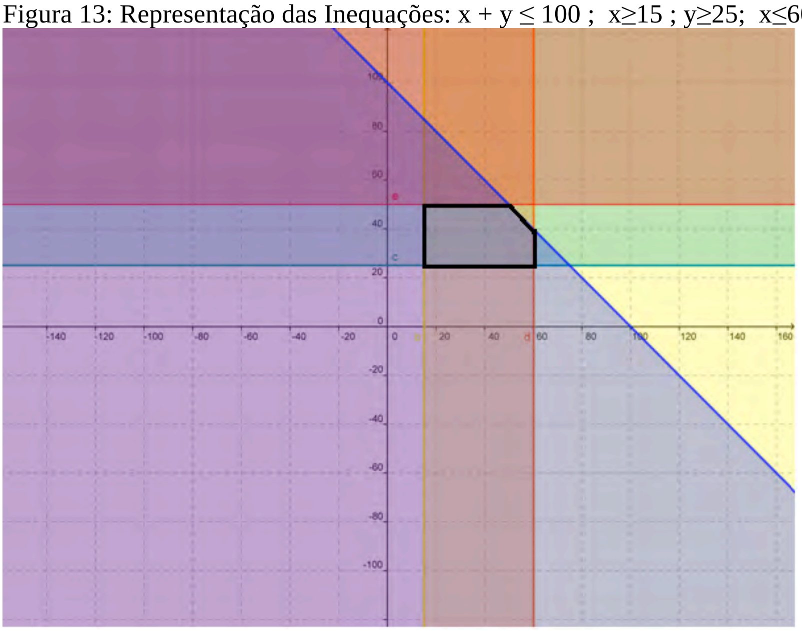


Fonte: Arquivo do pesquisador.

v. O distribuidor entregará no máximo 50 artigos do tipo B. Assim, **$y \leq 50$**.

Traça-se a reta $y = 50$. Testa-se o ponto (0,0) na inequação $y \leq 50$ obtendo uma desigualdade verdadeira. Logo, a região a ser hachurada é o semiplano que contém o ponto (0,0). Assim:

Figura 13: Representação das Inequações: $x + y \leq 100$; $x \geq 15$; $y \geq 25$; $x \leq 60$ e $y \leq 50$



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Utilizando um Software Gráfico

Com o software gráfico basta plotar as inequações referentes às restrições que ele determinará a região das possíveis soluções ótimas. Assim:

Figura 14: Resolução Gráfica da Situação-Problema

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Cálculo do Valor da Função Objetivo em Cada Vértice da Região Poligonal

Definida a região poligonal correspondente as possíveis soluções ótimas, deve-se determinar e testar cada vértice desta região na função objetivo para verificar qual valor irá corresponder ao lucro máximo. As coordenadas dos vértices da região poligonal são: (15,25); (15,50); (50,50); (60,40) e (60,25). Neste exemplo, tais vértices foram facilmente calculados. Em determinados problemas, para se determinar os vértices há necessidade de resolver sistemas para determinação dos vértices.

Assim, temos:

Vértice	*Valor da Função Objetivo* *L = 20x + 30y*
(15,25)	L= 20.15+30.25 = 1 050 → mínimo
(15,50)	L= 20.15+30.50 =1 800
(50,50)	**L= 20.50+30.50 =2 500 → máximo**
(60, 40)	L= 20.60+30.40 = 2 400
(60, 25)	L = 20.60+30.25= 1 950

Determinação da Solução do Problema

Analisando os resultados encontrados ao substituir as coordenadas dos vértices na função objetivo, conclui-se que o ponto que irá maximizar tal função será o de coordenadas (50,50). Assim, para se obter um lucro máximo, deve-se encomendar 50 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B obtendo um lucro de 2 500 unidades monetárias.

Considerações finais

O que verificamos, principalmente na escola pública brasileira, é que o professor não desenvolve atividades que tratem da inicialização do estudo em Programação Linear e nem mesmo nas propostas curriculares é feita tal sugestão.

Verifica-se a grande riqueza de conteúdos trabalhados de forma interligada num só problema. Iniciar o estudo com problemas simples e, aos poucos ir apresentando problemas mais complexos é uma alternativa para o entendimento do aluno. Com o auxílio de software gráfico pode-se, em pouco tempo, explorar vários problemas que envolvam até três variáveis, mas, com apenas duas variáveis é possível explorar vários problemas. A resolução gráfica facilita o entendimento dos princípios básicos do método analítico.

Analisando os conteúdos necessários para a resolução de situações-problema utilizando a Programação Linear percebe-se que tal conteúdo está de acordo com os conteúdos previstos na Proposta Curricular. Cabe ao professor propor problemas de otimização visando despertar o interesse do aluno, possibilitando uma participação mais ativa do mesmo durante as aulas e fazendo com que os alunos possam identificar a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos estudados.

REFERÊNCIAS

Andrade, E. L. (2004) *Introdução à Pesquisa Operacional: métodos e modelos para a análise de decisão*. Rio de Janeiro, Brasil: LTC.

Boldrini, J.L. *et al.* (1980). *Álgebra Linear*. São Paulo, Brasil: Harper & Row do Brasil.

Brasil. Ministério de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, Brasil: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológicas.

Caixeta, F. J. V. (2004). *Pesquisa Operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais*. São Paulo, Brasil: Atlas.

Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo, Brasil: Ática.

Frant, J. B. (1994). A informática na formação de professores. *Educação Matemática em Revista, 3,* pp. 25-28.

Lachtermacher, G. (2004). *Pesquisa operacional na tomada de decisões*. Rio de Janeiro: Campus.

Penteado, M. G., Borba, M. C. (Org). (2000). *A informática em Ação: Formação de Professores, Pesquisa e Extensão.* São Paulo, Brasil: Olho D'água.

Puccini, A. L.; Pizzolato, N. (1987). *Programação Linear*. São Paulo, Brasil: Livros técnicos e Científicos Editora S.A.

São Paulo Secretaria da Educação. (2010). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias/Secretaria da Educação*. São Paulo, Brasil: SEE.

Silva, E. M. *et al.* (1998). *Pesquisa Operacional*. São Paulo, Brasil: Atlas.

Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. (2012). Disponível em http://www.sobrapo.org.br/o_que_e_po.php, acesso em 13/01/2012.

Traldi, A. J. (2012) *Sistemas de Inequações do 1o Grau: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações.* Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/armando_traldi.pdf, acesso em 6/1/2012.

Valente, J. A. (2012). *Introdução à Pesquisa Operacional.* Disponível em http://www.dt.fee.unicamp.br/~valente/capt1_044.pdf, acesso em 13/01/2012.

SOBRE A AUTORA

Gilmara Aparecida da Silva: Professora de Educação Básica, Escola Estadual Stela Machado, Secretaria de Estado da Educação de São Paulo Bauru, São Paulo, Brazil. É formada em Licenciatura em Matemática e Mestre em Educação pela Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho" - UNESP/Bauru/SP. Atualmente, é doutoranda em Educação para a Ciência pela mesma universidade e professora de Educação Básica titular de cargo na Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo. Tem experiencia em formação continuada em Matemática na função de Professora Formadora do Programa Pró-Letramento parceria UNESP/MEC (Ministério de Educação e Cultura) e do PNAIC – Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa.